Chapitre1

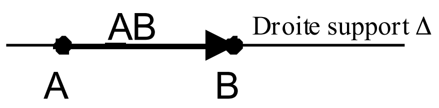
Outils mathématiques

I- Le vecteur

1°) Définition

Un *scalaire* est un nombre réel, pouvant être utilisé pour mesurer une grandeur (vitesse, température, durée, etc.)

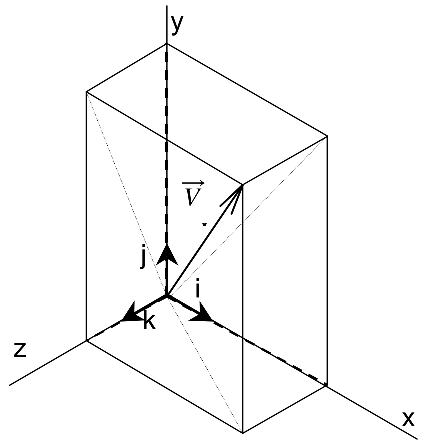
Un *vecteur* est une représentation graphique, dans le plan ou l'espace, délimitée par une origine et une extrémité.



Un *vecteur* est défini par :

- sa direction (vertical, horizontal…)
- son sens (haut, bas, droite gauche…)
- sa norme (ou intensité)

2°) Coordonnées



Soit R un repère orthonormé direct, de vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Soit un vecteur $\vec{V}$ de coordonnées cartésiennes a, b et c. Il existe plusieurs notations :

$\vec{V}$ (a ; b ; c) $\quad \vec{V}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \vec{V}\begin{cases} a \\ b \\ c \end{cases} \quad \vec{V} = a.\vec{i} + b.\vec{j} + c.\vec{k}$

3°) Norme

Une unité de longueur ayant été choisie sur la droite (Δ) support du vecteur $\overrightarrow{AB}$, on appelle longueur (ou norme, intensité, module ou valeur absolue) du vecteur $\overrightarrow{AB}$, désignée par $\|\overrightarrow{AB}\|$ la distance AB.

On peut déterminer la valeur de la norme du vecteur $\vec{V}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ avec la relation: $\|\vec{V}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

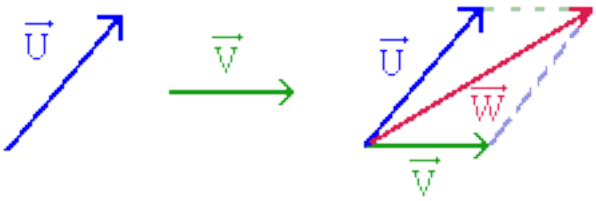
Si $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$ alors, $a = x_B - x_A$, $b = y_B - y_A$ et $c = z_B - z_A$

Cas particulier : si $\|\overrightarrow{AB}\| = 1$, le vecteur est dit unitaire.

4°) Somme de vecteurs

Définition:

La somme de deux vecteurs libres $\vec{U}$ et $\vec{V}$, notée $\vec{U} + \vec{V}$, est un vecteur libre $\vec{W}$, obtenu par la "règle du parallélogramme".



$$\vec{W} = \vec{U} + \vec{V}$$

Propriétés

L'addition vectorielle est une loi de composition interne et possède les propriétés suivantes :

- Associativité : $(\vec{U} + \vec{V}) + \vec{W} = \vec{U} + (\vec{V} + \vec{W})$
- Commutativité : $\vec{U} + \vec{V} = \vec{V} + \vec{U}$

5°) Produit par un scalaire

Définition

Le produit d'un vecteur $\vec{V}$ par un scalaire α est un vecteur, noté $\alpha\vec{V}$, tel que :

- sa direction est celle de $\vec{V}$
- son sens : celui de $\vec{V}$ si $\alpha > 0$, celui de $-\vec{V}$ si $\alpha < 0$.
- sa norme est égale au produit de celle de $\vec{V}$ par la valeur absolue de α : $\|\alpha\vec{V}\| = |\alpha|\|\vec{V}\|$

Propriétés

La multiplication d'un vecteur par un scalaire est une loi de composition externe vérifiant les propriétés :

- Distributivité par rapport à l'addition des vecteurs :$\alpha(\vec{U} + \vec{V}) = \alpha\vec{U} + \alpha\vec{V}$
- Distributivité par rapport à l'addition des scalaires : $(\alpha + \beta)\vec{U} = \alpha\vec{U} + \beta\vec{U}$

II- Produit scalaire

Définition:

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, noté $\vec{U} \bullet \vec{V}$, est un scalaire égal au produit des normes des deux vecteurs par le cosinus de leur angle $\theta = (\vec{U}, \vec{V})$.

$$\vec{U} \bullet \vec{V} = \|\vec{U}\|\|\vec{V}\| \times cos\theta$$

Le produit scalaire est donc positif pour θ aigu, négatif pour θ obtu.

En posant U_x, U_y, U_z et V_x, V_y, V_z les composantes respectives de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, le produit scalaire de ces deux vecteurs est le scalaire défini par la relation :

$$\vec{U} \bullet \vec{V} = U_xV_x + U_yV_y + U_zV_z$$

Propriétés:

Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{U} et \overrightarrow{V}$ vérifie les propriétés suivantes:

- Commutativité: $\overrightarrow{U} \bullet \overrightarrow{V} = \overrightarrow{V} \bullet \overrightarrow{U}$
- Distributivité :$(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}) \bullet \overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} \bullet \overrightarrow{W} + \overrightarrow{V} \bullet \overrightarrow{W}$

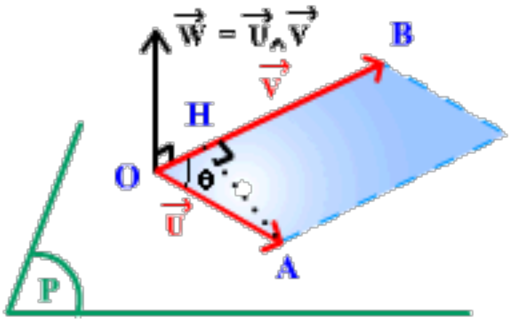
Remarque: le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul (car $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$)

III- Produit vectoriel

Définition:

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$, est un vecteur $\overrightarrow{W}$, noté $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}$ de :

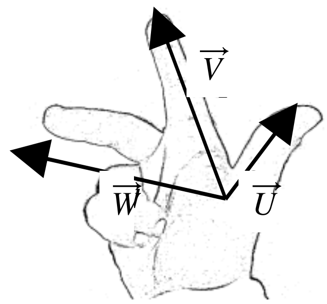
- direction : $\overrightarrow{W} \perp \overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{W} \perp \overrightarrow{V}$
- sens : trièdre $(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W})$ direct
- norme : $\|\overrightarrow{W}\| = \|\overrightarrow{U}\| \|\overrightarrow{V}\| \times |sin(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})|$



✋ *Trièdre direct :*
En utilisant la **main droite**, on peut modéliser :

- le vecteur $\overrightarrow{U}$ avec le **pouce** ;
- le vecteur $\overrightarrow{V}$ avec l'**index** ;

Le **majeur** donne alors le sens de $\overrightarrow{W}$, résultat du produit vectoriel $\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}$.



$\|\overrightarrow{W}\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur les représentants $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ des vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$.
En effet, $AH = OA \sin\theta = \|\overrightarrow{U}\| \times |\sin(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})|$ et l'aire du parallélogramme devient :

$$OB \times AH = \|\overrightarrow{V}\| \|\overrightarrow{U}\| \times |\sin(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})|$$

En posant U_x, U_y, U_z et V_x, V_y, V_z les composantes respectives de $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ dans la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \overrightarrow{k})$, le produit vectoriel de ces deux vecteurs est le vecteur défini par la relation :

$$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = (U_yV_z - U_zV_y)\vec{\imath} + (U_zV_x - U_xV_z)\vec{\jmath} + (U_xV_y - U_yV_x)\overrightarrow{k}$$

Propriétés:

- Non-commutativité: $\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = -\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{U}$
- Distributivité: $(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}) \wedge \overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{W} + \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W}$

IV- Projection d'un vecteur

En mécanique, on est souvent amené à faire la projection orthogonale d'un vecteur (par exemple une force) afin de trouver ses coordonnées dans le référentiel utilisé pour étudier le problème.

Sur le schéma suivant, on projette le vecteur $\overrightarrow{A}$ sur le vecteur $\overrightarrow{B}$ et la coordonnée de $\overrightarrow{A}$ selon l'axe OB sera $A_B = d$.

Pour trouver la valeur de d, il suffit d'appliquer les propriétés trigonométriques dans le triangle schématisé.

On remarque que $\cos(\alpha) = \dfrac{d}{\|\overrightarrow{A}\|}$

On en déduit que :

$$\boxed{d = \|\overrightarrow{A}\| \times \cos(\alpha)}$$