

Cours

ELECTRICITE

CIRCUITS ELECTRIQUES LINEAIRES

LOIS GENERALES

I - INTRODUCTION

En électronique, on produit des signaux qui représentent une information, puis, il faut transmettre ces signaux et utiliser l'information.

Pour réaliser ces différentes fonctions, on dispose de composants physiques que l'on associe entre eux. Ces éléments peuvent être :

- Simples ou élémentaires. Leurs comportements sont décrits par une équation mathématique simple.
- Complexes (transistor). On les remplace alors par des modèles ne comportant que des éléments simples.

II - NOTIONS DE DIPOLES

On appelle dipôle tout système électrique relié à l'extérieur par deux bornes. C'est un système susceptible de fournir de l'énergie ou non.



A chaque instant, tout courant qui rentre en A est égal au courant qui sort en B.

II - 1 - Orientation du courant dans un conducteur

Pour attribuer une valeur algébrique au courant i circulant dans un conducteur, il est indispensable d'orienter arbitrairement ce conducteur en y plaçant une flèche.

Lorsque l'on calcule la valeur de i , si :

- $i > 0$ le courant circule réellement dans le sens de la flèche.
- $i < 0$ le courant circule dans le sens opposé à celui de la flèche.

II - 2 - Orientation de la tension aux bornes d'un dipôle

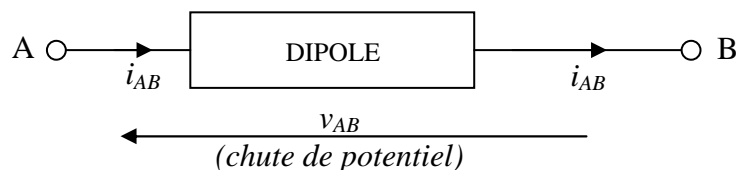
Cette orientation est indépendante de celle du courant. On peut choisir comme tension (ou différence de potentiel notée d.d.p.) aux bornes A et B du dipôle :

$$v_{AB} = v_A - v_B$$

$$v_{BA} = v_B - v_A$$

où v_A et v_B sont les potentiels des nœuds A et B pris par rapport à un potentiel de référence arbitraire.

On signale l'orientation choisie par une flèche.

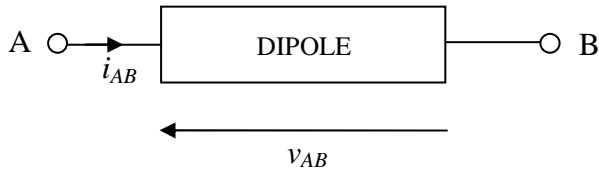


II - 3 - Convention récepteur, convention générateur

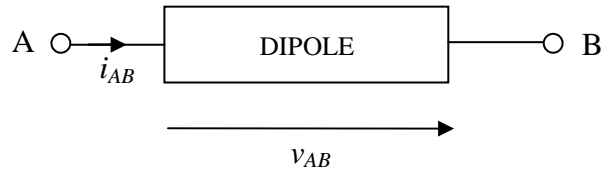
Les orientations du courant et de la tension aux bornes d'un dipôle étant arbitraires, il existe deux cas :

v et i de sens opposé : convention RECEPTEUR

v et i de même sens : convention GENERATEUR



Convention récepteur



Convention générateur

Pour un récepteur, les sens de parcours positifs sont opposés pour la tension et le courant.

En fait, le choix arbitraire des conventions n'indique pas pour autant le type de fonctionnement réel du dipôle. Pour un dipôle auquel on applique la convention récepteur (ce qui est souvent le cas) il faut connaître le signe du produit $(v.i)$:

$(v.i) > 0$ le dipôle fonctionne en RECEPTEUR

$(v.i) < 0$ le dipôle fonctionne en GENERATEUR

III - DIPÔLES ELEMENTAIRES

Il existe cinq éléments principaux dans deux catégories :

❖ Deux éléments actifs ou sources

- Générateur de tension idéal
- Générateur de courant idéal

❖ Trois éléments passifs

- Résistance
- Capacité
- Inductance

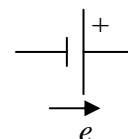
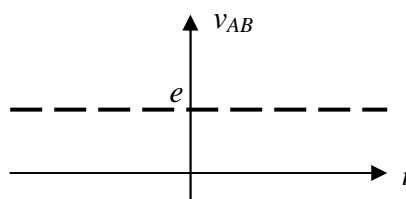
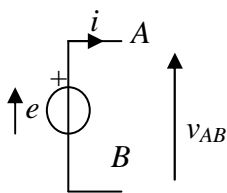
Chaque élément est caractérisé par la relation qu'il impose entre la tension à ses bornes et le courant qui le traverse. Cette relation $v = f(i)$ est la caractéristique de l'élément.

III - 1 - Les éléments actifs

Les sources sont les éléments qui peuvent apporter l'énergie et qui permettent de modifier l'état électrique des réseaux.

III - 1 - 1 - Générateur de tension idéal

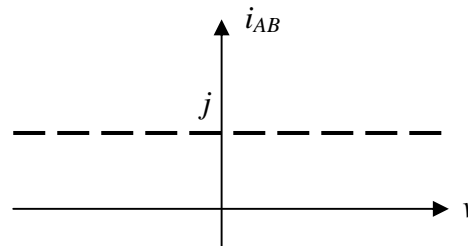
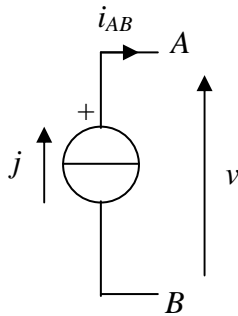
C'est un dipôle qui impose la valeur de la tension à ses bornes quel que soit le courant qui le traverse. $\Rightarrow v_{AB} = e$ quel que soit i , avec e force électromotrice



III - 1 - 2 - Générateur de courant idéal

C'est un dipôle qui impose la valeur du courant qui le traverse quelle que soit la tension à ses bornes.

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{c} i_{AB} = j \\ \hline \end{array} \right| \quad \forall v \quad \text{avec } j \text{ courant électromoteur}$$



Remarque : Ces deux sources peuvent fonctionner $\left| \begin{array}{l} \text{en générateur (elles fournissent de l'énergie)} \\ \text{en récepteur (elles reçoivent de l'énergie)} \end{array} \right.$

Sources liées

Lorsque e et/ou j dépendent d'un courant, circulant dans une des branches du circuit, ou d'une tension, présente entre deux points d'une des branches du circuit, suivant des relations linéaires, on dit alors que les sources sont dépendantes ou liées.

Remarque : ces sources liées apparaissent dans la modélisation des éléments actifs.

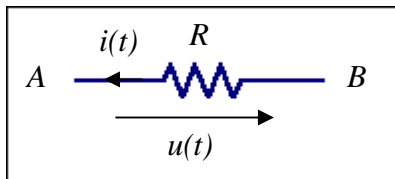
III - 2 - Les éléments passifs

Les éléments passifs modifient les signaux qui leur sont appliqués sans en engendrer.

III - 2 - 1 - Résistance pure R

Une résistance R parcourue par un courant $i(t)$ crée une chute de tension.

Convention récepteur :



$$u(t) = R.i(t)$$

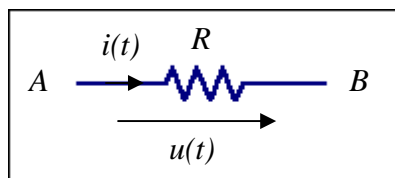
R résistance en Ohm (Ω)

$$i(t) = G.u(t)$$

$G = \frac{1}{R}$ conductance en siemens (S)

LOI D'OHM

Convention générateur :



$$u(t) = -R.i(t)$$

$$i(t) = -G.u(t)$$

III - 2 - 2 - Condensateur parfait C

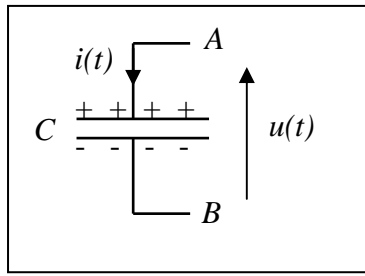
Un condensateur parfait est capable d'emmagasiner une charge électrique sans aucun autre phénomène secondaire.

Quantité d'électricité : $q(t) = C.u(t)$

Quantité d'électricité par seconde = courant : $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$



Convention récepteur :



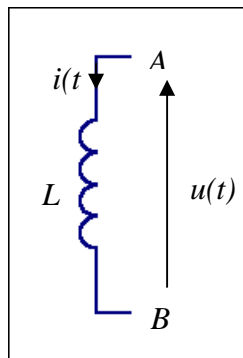
$$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt} \quad C \text{ capacité en Farad (F)}$$

III - 2 - 3 - Bobine d'inductance parfaite L

Une bobine d'inductance parfaite est capable d'emmagasinier un flux d'induction magnétique sans aucun autre phénomène secondaire.

$$\begin{array}{|l} \text{Flux d'induction : } \Phi(t) = L \cdot i(t) \\ \text{Tension aux bornes de la bobine : } u(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} \end{array}$$

Convention récepteur :



$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad L \text{ inductance propre ou auto inductance en Henry (H)}$$

IV - RESEAUX (CIRCUITS) LINEAIRES

Un réseau est un ensemble de dipôles reliés les uns aux autres par des conducteurs filiformes de résistance négligeable. Nous allons énoncer différentes définitions relatives à la forme des réseaux.

IV - 1 - Définitions

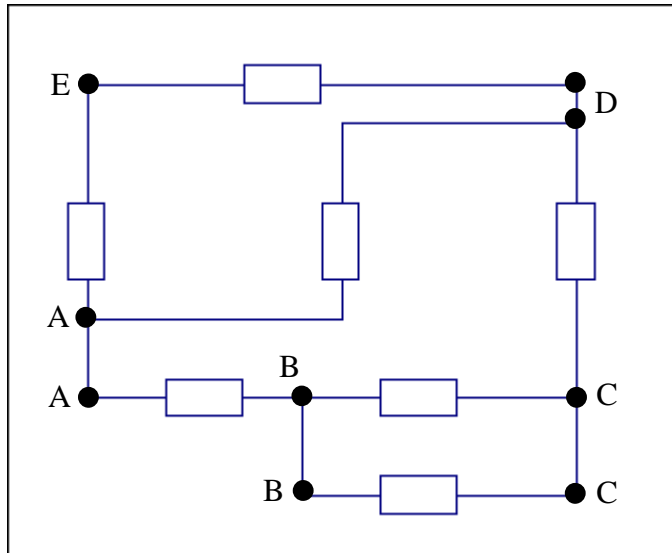
BRANCHE d'un réseau est constituée de dipôles connectés en série et, limitée par deux points entre lesquels aucune dérivation de courant ne se produit.

⇒ Tous les éléments d'une même branche sont parcourus par le même courant.

NŒUDS d'un réseau sont les extrémités des branches où se produisent généralement les dérivations de courant.

MAILLE d'un réseau est un ensemble de branches constituant un circuit fermé, chacun des nœuds n'appartenant qu'à deux branches de ce circuit fermé.





A, B, C, D : nœuds

E : nœud fictif

AB, BC, CD, DA, DEA : branches

ABCD, BCB, ADEA,
ABCDEA, ABBCCDEA ...:
mailles

IV - 2 - Lois de kirchhoff

Pour écrire les équations représentatives d'un réseau (relations entre courant, tension et éléments constitutifs) on utilise deux lois :

- La loi des nœuds
- La loi des mailles

IV - 2 - 1 - La loi des nœuds

Elle traduit la conservation de l'électricité.

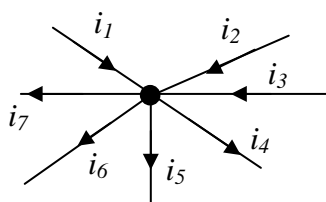
La somme algébrique des courants qui arrivent à un nœud est nulle

ou

La somme algébrique des courants qui partent d'un nœud est nulle

ou

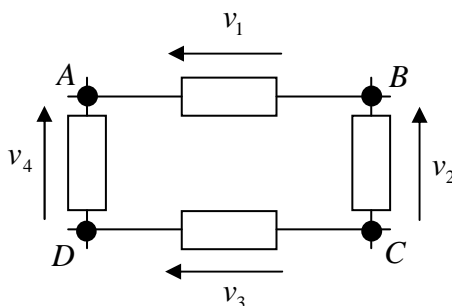
La somme des courants arrivant à un nœud est égale à la somme des courants partant du même nœud.



$$i_1 + i_2 + i_3 = i_4 + i_5 + i_6 + i_7$$

$$i_1 + i_2 + i_3 - i_4 - i_5 - i_6 - i_7 = 0$$

IV - 2 - 2 - La loi des mailles



Remarque : les tensions aux bornes des différents dipôles sont orientées arbitrairement.

Si on part du nœud A et que l'on parcourt la maille jusqu'au nœud A, alors $v_A - v_A = \sum_i v_i = 0$.

La somme algébrique des tensions le long d'une maille est nulle.

On se fixe un sens de parcours, c'est à dire que l'on oriente la maille :

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{A B C D A} & \quad v_1 + v_2 - v_3 - v_4 = 0 \\ \rightarrow \text{A D C B A} & \quad v_4 + v_3 - v_2 - v_1 = 0 \end{aligned}$$

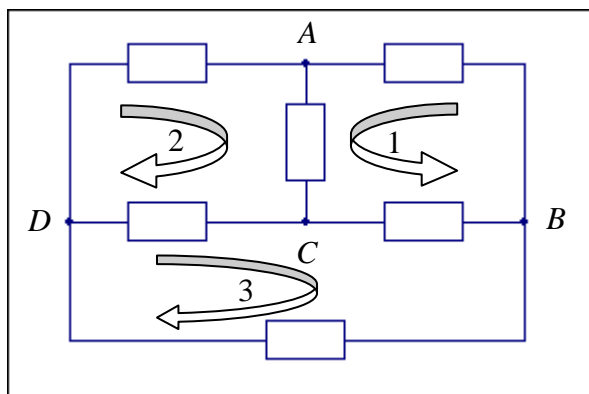
Remarque : on a compté positivement la tension lorsque son sens est opposé à celui du parcours.

IV - 3 - Analyse d'un réseau par la méthode des mailles

On considère un réseau constitué de plusieurs mailles, donc de plusieurs branches et nœuds. Chacune des branches de ce réseau ne contient que des générateurs et/ou des résistances connus. On se propose de déterminer les intensités des courants qui parcourent les branches de ce réseau ou, ce qui est équivalent, les tensions aux bornes de ces branches.

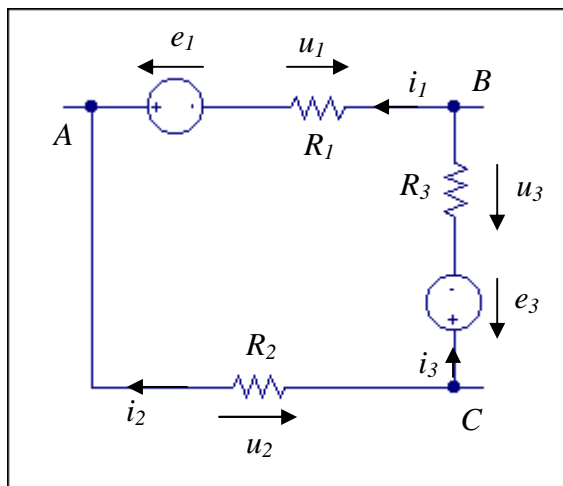
\Rightarrow on écrit la $\left\{ \begin{array}{l} \text{loi des mailles} \\ \text{loi des nœuds} \end{array} \right.$

ATTENTION : - aucune branche ne doit être laissée de côté
- chacune des mailles doit contenir au moins une branche qui n'appartient qu'à elle.



- 3 lois des mailles
- 4 nœuds A, B, C, D
- 3 lois des nœuds

Equation d'une maille :



On place les courants dans les branches de façon arbitraire, puis les tensions aux bornes des résistances en utilisant la convention récepteur.

$$\Rightarrow u_k = R_k \cdot i_k$$



On parcourt la maille dans le sens A B C A.

Loi des mailles $\Rightarrow e_1 - u_1 - u_3 - e_3 + u_2 = 0$

Loi d'ohm \Rightarrow

$$u_1 = R_1.i_1$$

$$u_2 = R_2.i_2$$

$$u_3 = R_3.i_3$$

$$\Rightarrow e_1 - R_1.i_1 - R_3.i_3 - e_3 + R_2.i_2 = 0$$

$$\Rightarrow \sum_k (\pm e_k) + \sum_k (\pm R_k.i_k) = 0$$

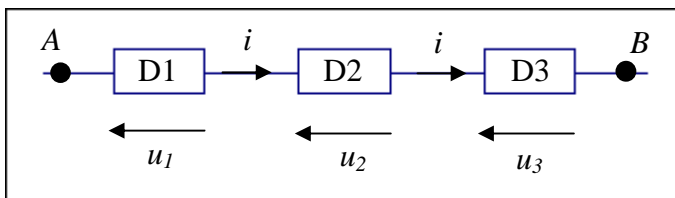
- ♦ La force électromotrice (e_k) est précédée du signe + si son sens est opposé au sens de parcours de la maille.
- ♦ Le terme ($R_k.i_k$) est précédé du signe + si le sens du courant qui parcourt R_k est identique au sens de parcours de la maille (ce qui revient à dire que la tension aux bornes de R_k est opposée au sens de parcours de la maille...convention récepteur!!).

V - ASSOCIATIONS DE DIPOLES

Il y a deux types d'associations simples : la mise en série et la mise en parallèle.

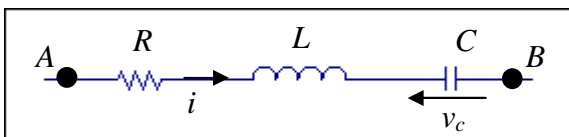
V - 1 - Mise en série

Les dipôles sont disposés les uns à la suite des autres et sont tous parcourus par le même courant.



$$v_A - v_B = u_1 + u_2 + u_3$$

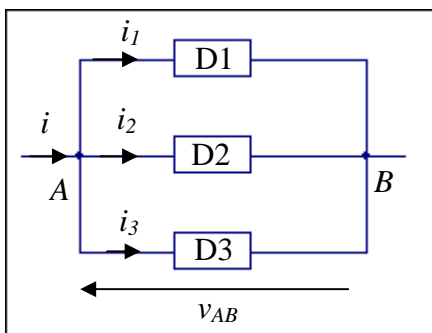
Exemple :



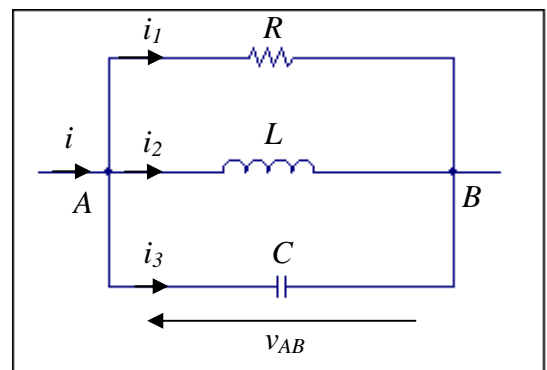
$$v_A - v_B = R.i + L.\frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt' + v_c(t=0)$$

V - 2 - Mise en parallèle

Les extrémités des dipôles sont reliées à deux nœuds de manière à ne former qu'un seul dipôle équivalent. Tous les dipôles ont la même tension à leurs bornes.



$$i = i_1 + i_2 + i_3$$



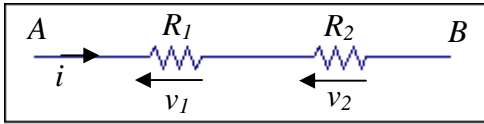
$$i(t) = \frac{v_{AB}}{R} + C.\frac{dv_{AB}}{dt} + \frac{1}{L} \int_0^t v_{AB}(t') dt' + i_2(t=0)$$



V - 3 - Association d'éléments de même nature

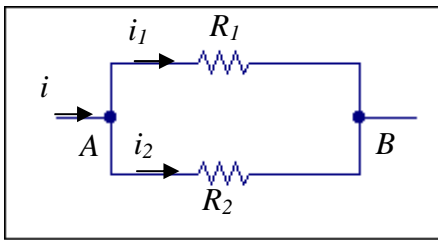
On définit dans ce cas un élément unique de même nature que les constituants quel que soit l'instant considéré et les signaux appliqués.

V - 3 - 1 - Résistances



$$v_{AB} = v_1 + v_2 = R_1 \cdot i + R_2 \cdot i \\ = (R_1 + R_2) \cdot i$$

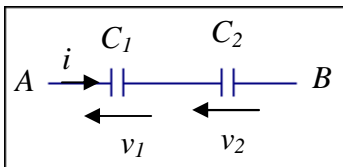
$$R_{eq} = R_1 + R_2$$



$$i = i_1 + i_2 = \frac{v_{AB}}{R_1} + \frac{v_{AB}}{R_2} \\ = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot v_{AB}$$

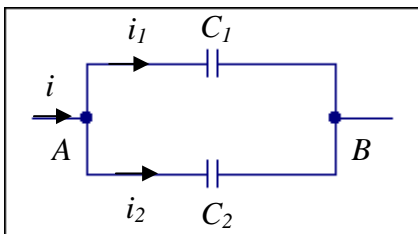
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \\ R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

V - 3 - 2 - Capacités



$$v_{AB} = v_1 + v_2 \\ = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \cdot \int_0^t i(t') dt'$$

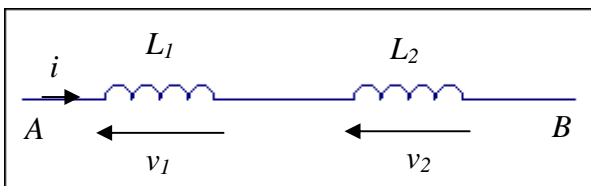
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \\ C_{eq} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$



$$i = i_1 + i_2 \\ = C_1 \frac{dv_{AB}}{dt} + C_2 \frac{dv_{AB}}{dt}$$

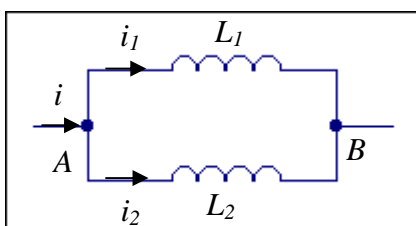
$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

V - 3 - 3 - Bobines d'inductances parfaites



$$v_{AB} = v_1 + v_2 \\ = L_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

$$L_{eq} = L_1 + L_2$$



$$i = i_1 + i_2 \\ = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) \cdot \int_0^t v_{AB}(t') dt'$$

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \\ L_{eq} = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2}$$

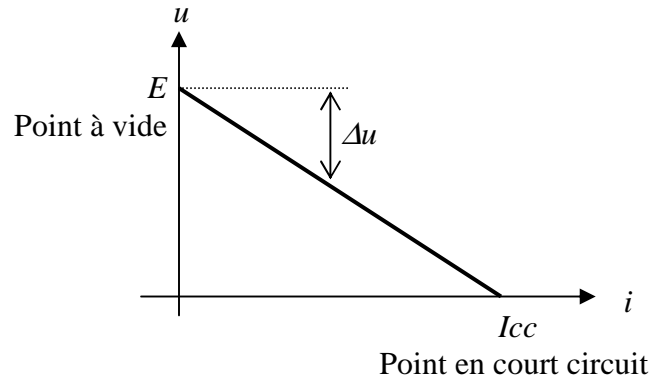
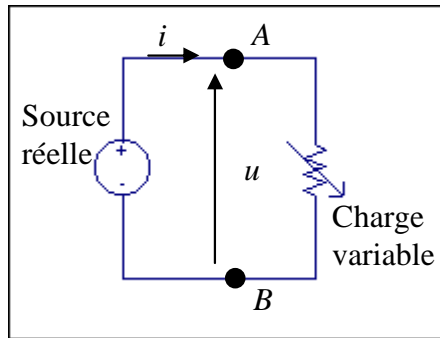
V - 4 - Sources réelles

Les sources idéales se rencontrent que très rarement dans la pratique. La réalité nous amène donc à définir des modèles (ou schémas équivalents) de sources réelles.

Considérons une charge (résistive) branchée aux bornes d'une source continue (pile...)

Des mesures montrent que la tension aux bornes de la charge est fonction du courant débité (ni le courant, ni la tension ne sont constants). On obtient une droite $u = f(i)$ appelée caractéristique externe.

⇒ Cette source n'est ni une source de tension idéale, ni une source de courant idéale.



→ A vide : (circuit ouvert, la charge tend vers l'infini)
Le courant débité est nul.
La tension a pour valeur E (force électromotrice).

→ En court circuit : (la charge tend vers zéro)
La tension aux bornes de la charge est nulle.
Le courant a pour valeur I_{cc} (courant électromoteur).

On a donc, $u = E - \Delta u$ avec Δu chute de tension proportionnelle au courant débit
⇒ $\Delta u = r.i$

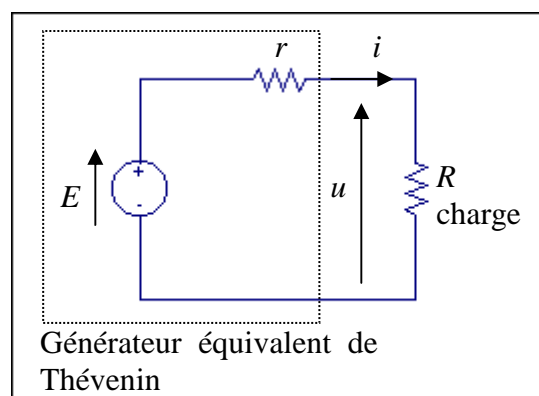
$$\Rightarrow \boxed{u = E - r.i} \quad r : \text{résistance interne du générateur}$$

Le générateur réel est alors entièrement défini par un des deux couples de valeurs $(E; r)$ $(I_{cc}; r)$.
Suivant le couple de valeurs choisi, on obtient deux modèles, de sources réelles, différents mais bien sûr équivalents.

V - 5 - Représentation de Thévenin

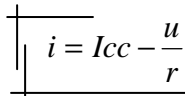
La source réelle est chargée donc elle débite un courant i tel que $u = E - r.i$ aux bornes de la charge. Comme E et r sont des grandeurs indépendantes de i , on peut établir le schéma équivalent selon la représentation de Thévenin.

La source réelle peut être représentée par une source de tension idéale, de force électromotrice E , placée en série avec une résistance r .



V - 6 - Représentation de Norton

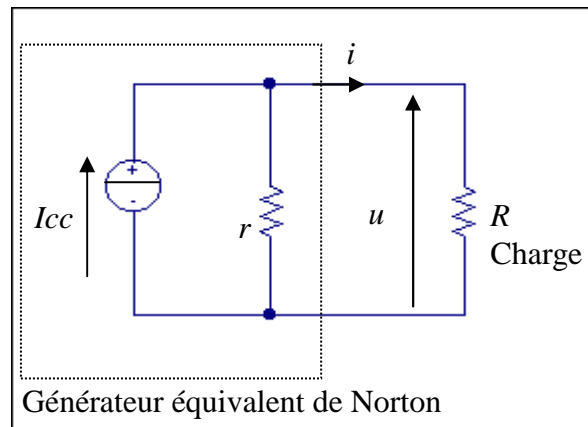
Comme précédemment, la source réelle chargée débite un courant i tel que $u = E - r.i$.

$$\Rightarrow i = \frac{E}{r} - \frac{u}{r}$$


The diagram shows a Norton equivalent circuit. It consists of a current source labeled I_{cc} in parallel with a resistor labeled r . The output terminals are indicated by a vertical line with a horizontal bar at the top, and the current i is shown flowing out of the top terminal.

Comme I_{cc} et r sont des grandeurs indépendantes de u , on peut établir le schéma équivalent selon la représentation de Norton.

La source réelle peut être représentée par une source de courant idéale, de courant électromoteur I_{cc} , placée en parallèle avec une résistance r .



V - 7 - Choix d'une représentation

Les représentations de Thévenin et de Norton sont strictement équivalentes et conduisent à des calculs de même difficulté dans la résolution d'un problème de réseau.

Si $r \ll \text{charge } R \Rightarrow$ source réelle est équivalente à une source idéale de tension.

Si $r \gg \text{charge } R \Rightarrow$ source réelle est équivalente à une source idéale de courant.

THEOREMES GENERAUX

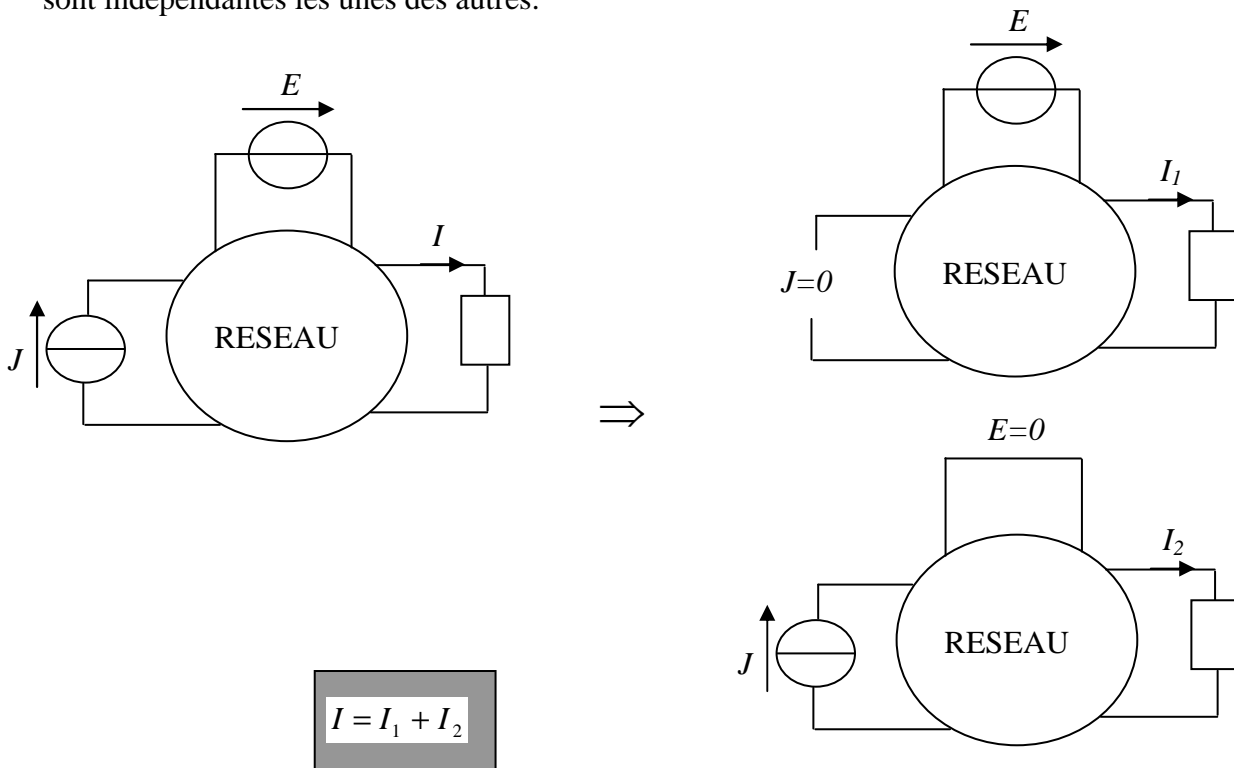
Ce sont des principes et théorèmes qui facilitent la mise en équation des réseaux, et, par conséquent, leur résolution. Ils permettent de simplifier les calculs. D'une manière générale, ces théorèmes sont valables pour les réseaux linéaires soumis à des signaux quelconques.

I - THEOREME DE SUPERPOSITION

Le principe de superposition résulte directement de la linéarité des lois de Kirchhoff.

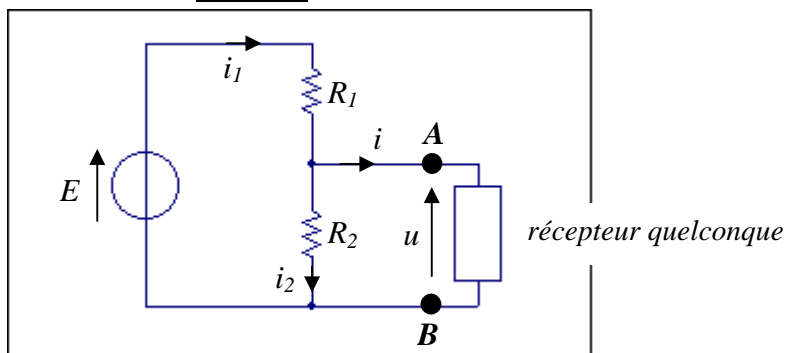
Théorème : le courant (ou la tension) crée(e) dans une branche par plusieurs sources indépendantes agissant simultanément, est égal à la somme des courants (ou des tensions) qu'imposent dans cette même branche, chaque source supposée seule.

De ce principe découle le fait que les diverses réponses partielles qui se manifestent dans le réseau sont indépendantes les unes des autres.



II - THEOREME DE THEVENIN

II - 1 - exemple



On peut déterminer la relation $u = f(i)$ sans faire intervenir les caractéristiques du récepteur.

$$\begin{cases} u = R_2 \cdot i_2 \\ -E + R_1 \cdot i_1 + u = 0 \\ i = i_1 - i_2 \end{cases}$$

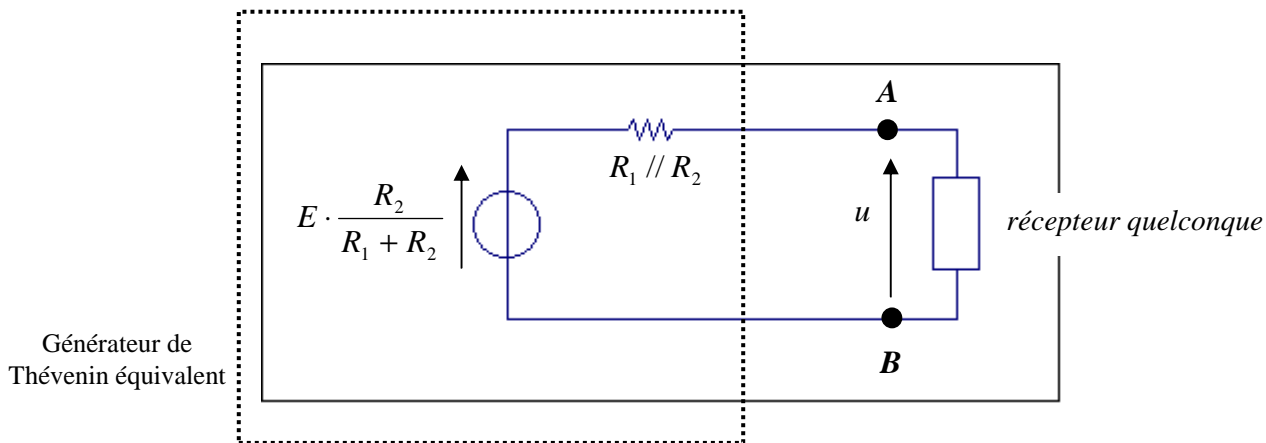
$$\Rightarrow u = E - R_1 \cdot i_1 = E - R_1 (i + i_2)$$

$$= E - R_1 \left(i + \frac{u}{R_2} \right)$$

$$\Rightarrow u \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) = E - R_1 \cdot i$$

$$u = E \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot i$$

Tout se passe comme si le récepteur était alimenté par une source de tension de force électromotrice $E \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ en série avec une résistance $\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$.



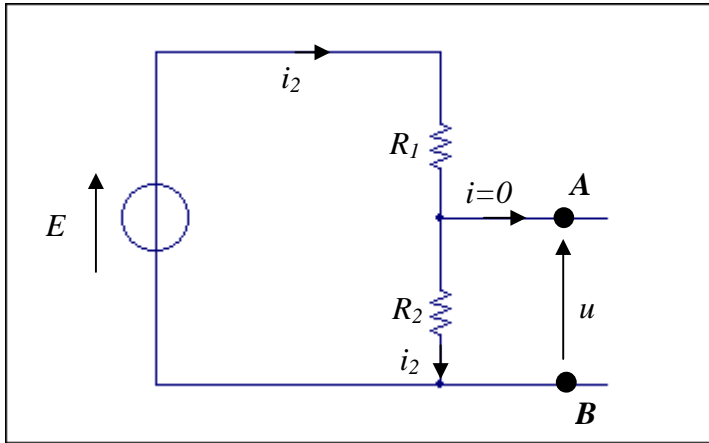
II - 2 - théorème

D'une façon générale, tout circuit vu de deux points A et B est équivalent à un générateur de THEVENIN (générateur de tension réel) constitué :

- * d'une force électromotrice notée E_{TH} (générateur de tension idéal)
- * d'une résistance interne R_{TH}

La détermination du générateur de Thévenin équivalent se fait de la manière suivante :

- ↪ E_{TH} est égale à la tension à vide qui apparaît entre A et B, lorsque le reste du réseau est débranché (la charge est enlevée).
- ↪ R_{TH} est égale à la résistance vue des points A et B lorsque le circuit est rendu passif (on éteint tous les générateurs indépendants)
 - \Rightarrow source de tension \equiv court-circuit
 - source de courant \equiv circuit ouvert)

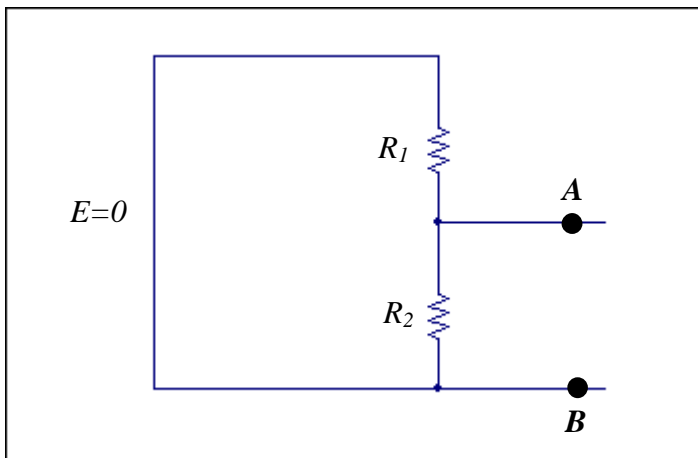


Charge débranchée

$$u = R_2 \cdot i_2$$

$$\Rightarrow i_2 = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

donc, $u = \frac{R_2 \cdot E}{R_1 + R_2} = E_{TH}$



$$R_{TH} = R_1 // R_2$$

III - THEOREME DE NORTON

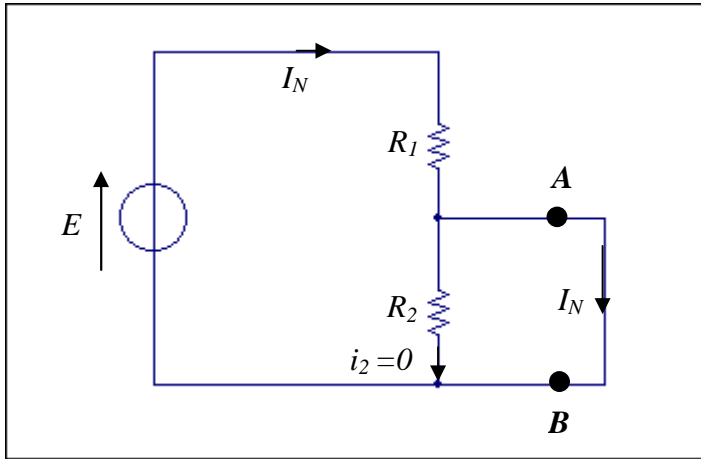
Ce théorème, réciproque du théorème de Thévenin, s'applique dans les mêmes conditions que celui-ci. On dira que tout circuit vu de deux points A et B est équivalent à un générateur de NORTON (générateur de courant réel) constitué :

- * D'un courant électromoteur noté I_N (*générateur de courant idéal*)
- * d'une résistance interne R_N

La détermination du générateur de Norton équivalent se fait de la manière suivante :

- ↳ I_N est le courant qui circule entre les bornes A et B, lorsque celles-ci sont court-circuitées.
- ↳ R_N est égale à la résistance vue des points A et B lorsque le circuit est rendu passif.

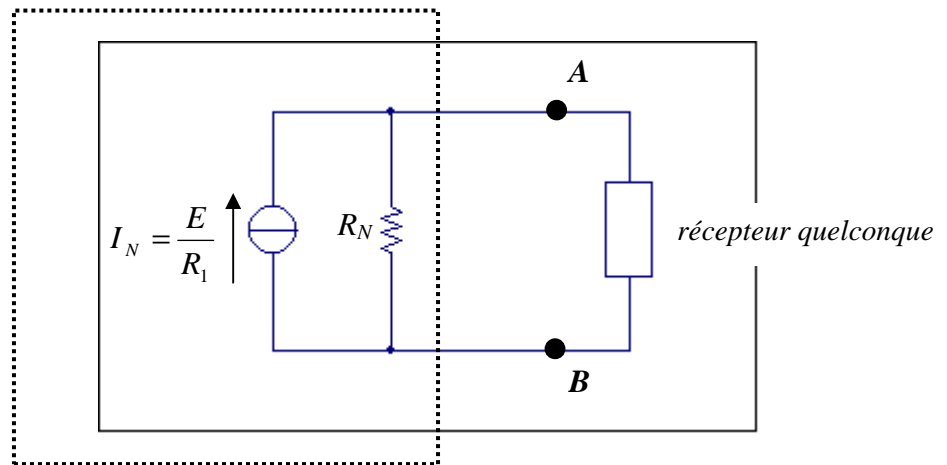




Charge court-circuitée
 $\Rightarrow -E + R_1 \cdot I_N = 0$
 donc, $I_N = \frac{E}{R_1}$

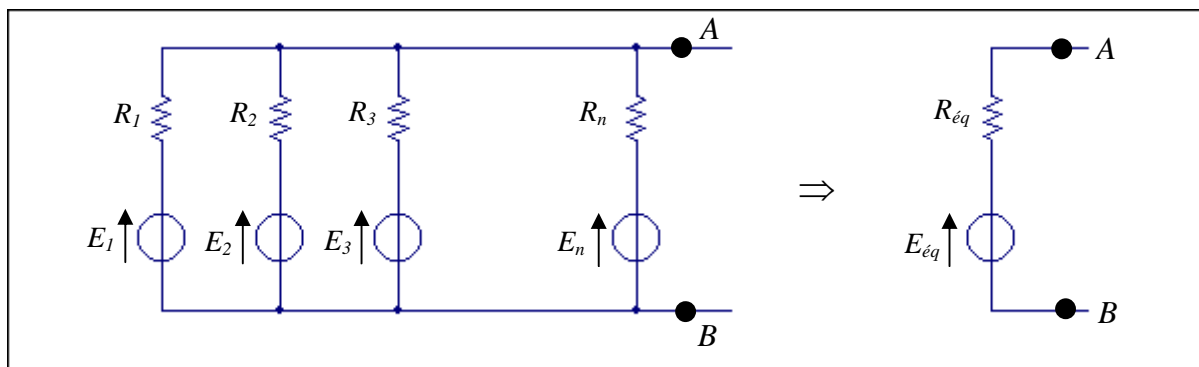
et, $R_N = R_{TH} = R_1 // R_2$

On obtient le schéma équivalent suivant :



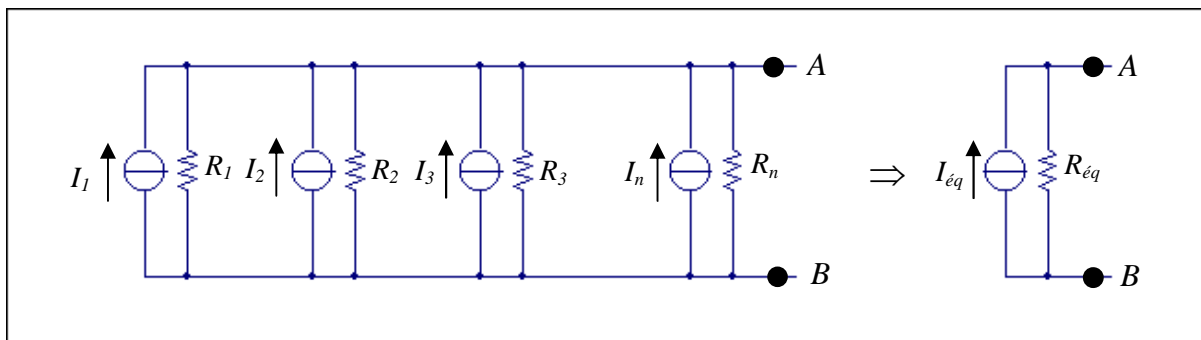
IV - THEOREME DE MILLMAN

On considère n sources de tension réelles placées en parallèles. Chacune d'elle est définie par E_{TH} et R_{TH} . On va montrer que ce groupement est équivalent à une source unique E_{eq} , R_{eq} .



Chacun des générateurs de tension peut être représenté sous la forme d'un générateur de Norton :

$$\left| \begin{array}{l} I_N = \frac{E_{TH}}{R_{TH}} \\ R_N = R_{TH} \end{array} \right.$$



$$I_{éq} = \sum_{k=1}^n I_k = \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{R_k} \quad \text{et} \quad \frac{1}{R_{éq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$$

Le générateur de Norton s'en déduit immédiatement.

$$R_{éq} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}}$$

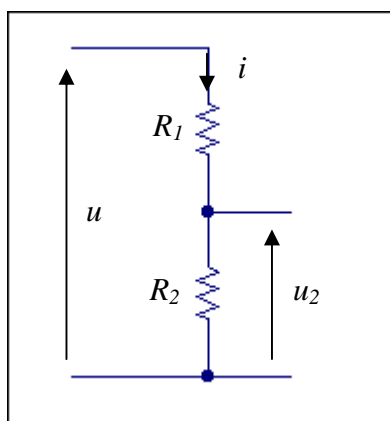
$$E_{éq} = R_{éq} \cdot I_{éq} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{R_k}$$

Remarque : Dans le calcul, on peut inclure des branches ne contenant que des résistances; il suffit alors de faire $E_k=0$ dans la branche k ne contenant que R_k .

V - PONTS DIVISEURS

V - 1 - Diviseur de tension

On cherche à déterminer la tension aux bornes d'un élément placé en série avec d'autres éléments (\Rightarrow le même courant circule dans les différents éléments), et ce **sans** utiliser les courants.



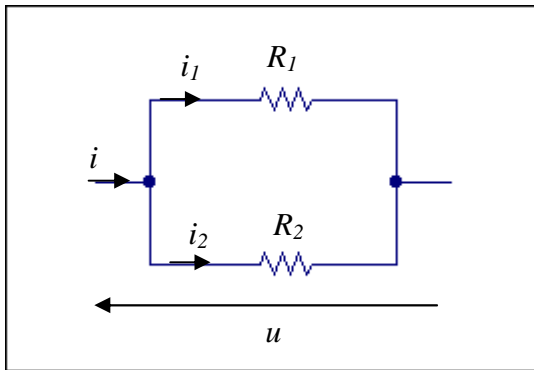
$$u_2 = R_2 \cdot i$$

$$u = (R_1 + R_2) \cdot i \quad \Rightarrow \quad u_2 = u \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{u_2}{u} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

V - 2 - Diviseur de courant

On cherche à déterminer le courant qui circule dans un élément placé en parallèle avec d'autres éléments (\Rightarrow la même tension se retrouve aux bornes des différents éléments) , et ce **sans** utiliser les tensions.



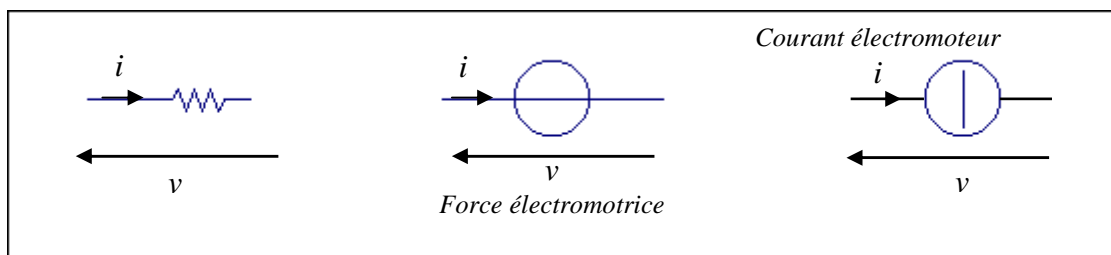
$$i_1 = G_1 \cdot u$$

$$i = (G_1 + G_2) \cdot u \quad \Rightarrow \quad i_1 = i \cdot \frac{G_1}{G_1 + G_2}$$

$$\frac{i_1}{i} = \frac{G_1}{G_1 + G_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

VI - PRINCIPE DE SUBSTITUTION

Une branche d'un circuit parcourue par un courant i et aux bornes de laquelle apparaît une tension v , peut être remplacée par une autre branche de constitution quelconque, à la condition que cette nouvelle branche soit parcourue par un courant i lorsqu'elle présente une tension v à ses bornes.



REGIME SINUSOIDAL PERMANENT

I - INTRODUCTION

Un réseau, constitué de dipôles linéaires passifs, soumis à une excitation (générateur de commande) a une réponse qui tend vers un régime forcé dont la nature est imposée par celle de l'excitation.

Dans le cas particulier où l'excitation est sinusoïdale la théorie des équations différentielles linéaires montre que le régime forcé est tel que toutes les tensions et tous les courants sont des fonctions sinusoïdales du temps de même pulsation, que celle de l'excitation.

Intérêt de l'étude en régime sinusoïdal ?

- Pour les fortes puissances, les courants industriels utilisés sont des courants alternatifs sinusoïdaux de basse fréquence (50 Hz Europe, 60 Hz U.S). De plus, il est très facile de produire un courant sinusoïdal à l'aide de machines tournantes (alternateurs). On a aussi la possibilité d'abaisser ou d'augmenter la tension (transformateur).
- Pour les faibles puissances, les courants et tensions n'ont presque jamais l'allure de sinusoïdes qui sont pauvres en information. Cependant, l'étude en régime sinusoïdal forcé est très utilisée en laboratoire pour ces systèmes de faibles puissances car :
 - ✓ Les essais sont simples à mettre en œuvre ; il existe des générateurs BF souples d'utilisation.
 - ✓ Cette étude présente une importance théorique fondamentale ; on a la possibilité de décomposer un signal en une somme de sinusoïdes (théorie de Fourier).

II - REPRESENTATION D'UNE GRANDEUR SINUSOÏDALE

II - 1 - Valeurs instantanées

On dit que le signal électrique (courant ou tension) $s(t)$ est une fonction sinusoïdale du temps, si on a la relation :

$$s(t) = S_m \cos(\omega.t + \varphi)$$

avec

- S_m : amplitude maximale de $s(t)$
($2.S_m$: amplitude crête à crête)
- ω : pulsation liée à la fréquence f (en Hertz) et à la période T
$$\omega = 2\pi.f = \frac{2\pi}{T} \text{ (en radians par seconde rad/s)}$$
- φ : phase à l'origine (en radians)
- $\omega.t + \varphi$: phase instantanée



On fait également intervenir en électricité la valeur efficace notée S_{eff} ou S .

$$S_{eff} = S = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt} \quad \text{pour un signal périodique quelconque.}$$

On obtient pour un signal sinusoïdal :

$$S^2 = \frac{1}{T} \int_0^T S_m^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{S_m^2}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos 2(\omega t + \varphi)}{2} dt = \frac{1}{2T} S_m^2 \left[t + \frac{\sin 2(\omega t + \varphi)}{2\omega} \right]_0^T$$

$$S = S_{eff} = \frac{S_m}{\sqrt{2}} \quad \text{signal sinusoïdal}$$

\Rightarrow

$$s(t) = S\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

Si $s'(t)$ est un autre signal sinusoïdal de même pulsation :

$$s'(t) = S'\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi')$$

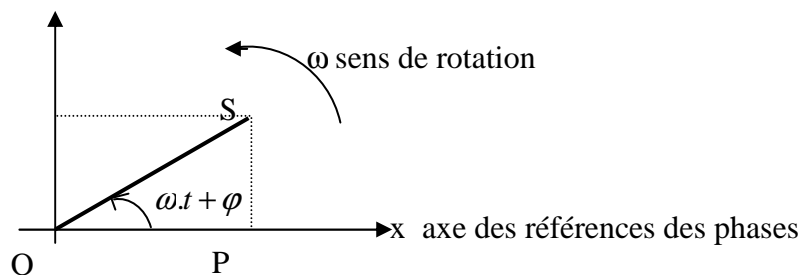
$(\varphi' - \varphi)$ représente le déphasage de $s'(t)$ par rapport à $s(t)$.

II - 2 - Représentation vectorielle : Diagramme de Fresnel

On associe à une grandeur sinusoïdale un vecteur tournant dans le sens trigonométrique à vitesse angulaire ω constante, autour de l'origine O.

Ce vecteur noté \overrightarrow{OS} :

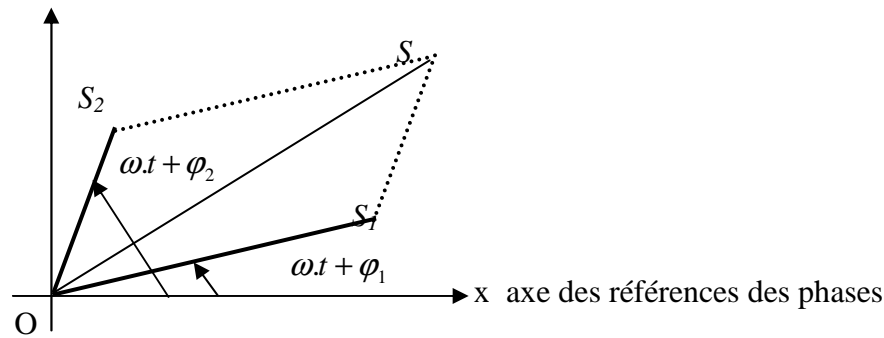
- a par convention une longueur représentant la valeur efficace S .
- fait avec l'axe Ox, choisi comme origine des phases, un angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OS})$ égal à $(\omega t + \varphi)$.



Le vecteur représentatif \overrightarrow{OS} est appelé vecteur de Fresnel associé à la grandeur sinusoïdale $s(t)$. Sa projection sur l'axe de référence, multipliée par $\sqrt{2}$ représente $s(t)$ en valeur instantanée.

Soit maintenant deux grandeurs sinusoïdales, de même pulsation, notées $s_1(t)$ et $s_2(t)$ représentées par les vecteurs de Fresnel $\overrightarrow{OS_1}$ et $\overrightarrow{OS_2}$.





Le triangle OS_1S_2 reste indéformable au cours du temps. On peut donc faire abstraction du temps. On représente alors le diagramme de Fresnel avec des valeurs dessinées à l'instant $t = 0$ choisi comme origine des temps.

Intérêt du Diagramme de Fresnel

Le vecteur tournant $\vec{OS} = \vec{OS}_1 + \vec{OS}_2$ peut alors être considéré comme l'image de la fonction sinusoïdale $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$. La somme de deux fonctions sinusoïdales se réduit à la somme de deux vecteurs.

Cette représentation est très utile pour un circuit relativement simple conduisant à un nombre restreint de vecteurs.

Dès que la complexité des circuits augmente, la représentation graphique devient lourde ; on lui préfère la représentation complexe.

II - 3 - Représentation par amplitudes complexes

Le diagramme de Fresnel est la représentation géométrique d'une valeur complexe.

Grandeur instantanée $s(t) = S\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$

Grandeur complexe associée $\underline{s}(t) = S\sqrt{2} \exp[j(\omega t + \varphi)]$

$$\underline{s}(t) = S\sqrt{2} e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

La fonction sinusoïdale $s(t)$ est donc la partie réelle de $\underline{s}(t)$.

$$s(t) = \Re(\underline{s}(t))$$

On associe aussi à $s(t)$ une amplitude complexe efficace qui permet de séparer les termes de phase et de temps comme pour le diagramme de Fresnel.

$$\underline{S} = S e^{j\varphi} = S_{\text{eff}} e^{j\varphi}$$

$$\underline{s}(t) = \underline{S} \sqrt{2} e^{j\omega t}$$

Amplitude complexe efficace

II - 4 - Intérêt de la représentation par amplitudes complexes

Cet intérêt provient essentiellement de la puissance de l'outil mathématique qui lui est associé.

⇒ simplification des opérateurs de dérivation et d'intégration.



II - 4 - 1 - Dérivation

$$s(t) = S\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\underline{s}(t) = S\sqrt{2} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\frac{d\underline{s}(t)}{dt} = j\omega \cdot S\sqrt{2} e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega \cdot \underline{s}(t) = \omega \cdot S\sqrt{2} e^{j(\varphi + \pi/2)} e^{j\omega t}$$

DERIVER consiste à :
 || multiplier l'amplitude par ω
 || ajouter $\pi/2$ à la phase.

$$\frac{ds(t)}{dt} = \Re\left(\frac{d\underline{s}(t)}{dt}\right) = \omega S\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

II - 4 - 2 - Intégration

$$s(t) = S\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\underline{s}(t) = S\sqrt{2} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\int \underline{s}(t) dt = \frac{1}{j\omega} \cdot S\sqrt{2} e^{j(\omega t + \varphi)} = \frac{1}{j\omega} \cdot \underline{s}(t) = \frac{1}{j\omega} \cdot S\sqrt{2} e^{j(\varphi - \pi/2)} e^{j\omega t}$$

INTEGRER consiste à :
 || diviser l'amplitude par ω
 || retrancher $\pi/2$ à la phase.

$$\int s(t) dt = \Re\left(\int \underline{s}(t) dt\right) = \frac{1}{\omega} \cdot S\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi - \pi/2)$$

Par ailleurs, nous allons montrer que les lois de Kirchhoff s'étendent aux amplitudes complexes (terme temporel éliminé) ce qui simplifie considérablement les différentes opérations linéaires à effectuer.

II - 4 - 3 - Loi des mailles

$$\text{Si le long d'une maille, } u_1(t) + u_2(t) - u_3(t) = 0$$

$$\text{Alors, } U_1\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_1) + U_2\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_2) - U_3\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_3) = 0$$

$$\text{En notation complexe : } \underline{U}_1\sqrt{2} e^{j\varphi_1} + \underline{U}_2\sqrt{2} e^{j\varphi_2} - \underline{U}_3\sqrt{2} e^{j\varphi_3} = 0$$

$$U_1\sqrt{2} e^{j\omega t} e^{j\varphi_1} + U_2\sqrt{2} e^{j\omega t} e^{j\varphi_2} - U_3\sqrt{2} e^{j\omega t} e^{j\varphi_3} = 0$$

On simplifie par : $\sqrt{2} e^{j\omega t}$

$$\Rightarrow U_1 e^{j\varphi_1} + U_2 e^{j\varphi_2} - U_3 e^{j\varphi_3} = 0$$

On peut donc écrire la loi des mailles avec les amplitudes complexes :

$$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 - \underline{U}_3 = 0$$

II - 4 - 4 - Loi des nœuds

$$\text{Si à un nœud, } i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) = 0$$

$$\text{Alors, } I_1\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_1) - I_2\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_2) + I_3\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_3) = 0$$



En notation complexe :

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 \sqrt{2} e^{j\alpha} - \underline{I}_2 \sqrt{2} e^{j\alpha} + \underline{I}_3 \sqrt{2} e^{j\alpha} &= 0 \\ \underline{I}_1 \sqrt{2} e^{j\alpha} e^{j\varphi_1} - \underline{I}_2 \sqrt{2} e^{j\alpha} e^{j\varphi_2} + \underline{I}_3 \sqrt{2} e^{j\alpha} e^{j\varphi_3} &= 0 \\ \Rightarrow \underline{I}_1 e^{j\varphi_1} - \underline{I}_2 e^{j\varphi_2} + \underline{I}_3 e^{j\varphi_3} &= 0 \end{aligned}$$

On simplifie par : $\sqrt{2} e^{j\alpha}$

On peut donc écrire la loi des nœuds avec les amplitudes complexes :

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$

III - IMPEDANCES ET ADMITTANCES COMPLEXES

En régime sinusoïdal permanent, les courants et tensions sont sinusoïdaux :

$$\underline{i}(t) = I \sqrt{2} e^{j\alpha} e^{j\omega t}$$

$$\underline{v}(t) = V \sqrt{2} e^{j\beta} e^{j\omega t}$$

Le rapport $\frac{v(t)}{i(t)} = \frac{V}{I}$ est indépendant du temps.

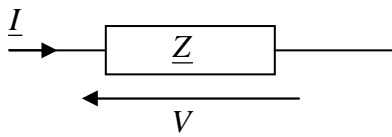
On définit : $\underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = \frac{V}{I} e^{j(\beta-\alpha)}$ **impédance** complexe en **OHMS** (Ω)

$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{V}} = \frac{I}{V} e^{j(\alpha-\beta)}$ **admittance** complexe en **SIEMENS** (S)

Ces deux nombres vont nous permettre d'étendre au régime sinusoïdal, des techniques de calcul déjà connues en régime permanent.

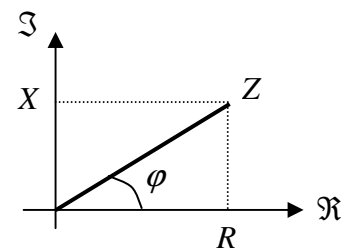
III - 1 - Impédance

\underline{Z} est un nombre complexe \Rightarrow parties réelle et imaginaire.



$$\underline{Z} = R + jX = Z \exp(j\varphi)$$

R : résistance (toujours positive) Ω
 X : réactance (>0 ou <0) Ω
 φ : phase ou argument
 $Z = |\underline{Z}|$: module (toujours positif) Ω



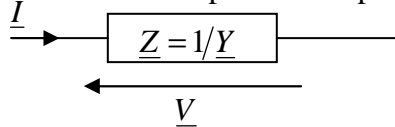
$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$R = Z \cos(\varphi) \quad \text{et} \quad X = Z \sin(\varphi)$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{X}{R}\right)$$

III - 2 - Admittance

\underline{Y} est un nombre complexe \Rightarrow parties réelle et imaginaire.



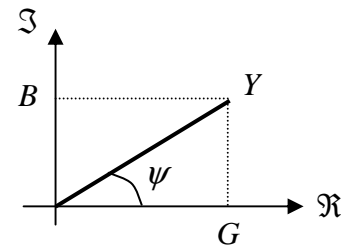
$$\underline{Y} = G + jB = Y \exp(j\psi)$$

G : conductance (toujours positive) S

B : susceptance (>0 ou <0) S

ψ : phase ou argument

$Y = |\underline{Y}|$: module (toujours positif) S



$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$$

$$G = Y \cos(\psi) \quad \text{et} \quad B = Y \sin(\psi)$$

$$\psi = \arctg\left(\frac{B}{G}\right)$$

IV - DIPÔLES SIMPLES EN RÉGIME SINUSOIDAL

IV - 1 - Éléments simples

On suppose que l'élément étudié est parcouru par un courant $i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha)$, et qu'il présente à ses bornes une tension $u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \beta)$.

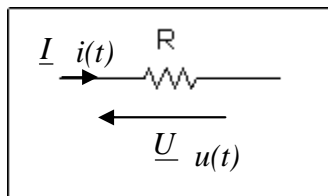
$$\underline{i}(t) = I\sqrt{2} \exp(j\omega t + j\alpha)$$

$$\Rightarrow \underline{I} = I \exp(j\alpha)$$

$$\underline{u}(t) = U\sqrt{2} \exp(j\omega t + j\beta)$$

$$\underline{U} = U \exp(j\beta)$$

IV - 1 - 1 - Résistance



$$u(t) = R.i(t)$$

$$\begin{aligned} \underline{u}(t) &= R.\underline{i}(t) = R.I\sqrt{2} \exp j(\omega t + \alpha) \\ &= R.\underline{I}.\sqrt{2} e^{j\omega t} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \underline{U} = R.\underline{I}$ la tension et le courant sont en phase.

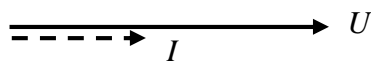
D'après la définition de l'impédance, on obtient

$$\underline{Z} = R$$

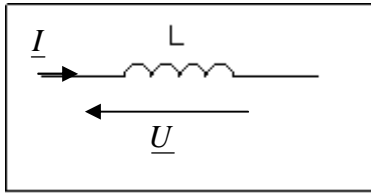
$$\underline{Y} = \frac{1}{R}$$

grandeurs réelles.

Le diagramme de Fresnel \Rightarrow



IV - 1 - 2 - Bobine d'inductance parfaite



$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$\underline{u}(t) = L \cdot \frac{d\underline{i}(t)}{dt} = jL\omega I \sqrt{2} \exp j(\omega t + \alpha)$$

$$= jL\omega \underline{I} \sqrt{2} e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \underline{U} &= jL\omega \underline{I} \\ \underline{U} &= L\omega \underline{I} e^{j\pi/2} \end{aligned} \quad \text{la tension et le courant sont en quadrature.}$$

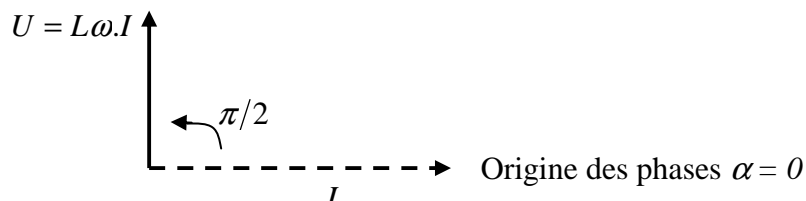
D'après la définition de l'impédance, on obtient :

$$\underline{Z} = jL\omega$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{jL\omega} = -j \frac{1}{L\omega}$$

$$\begin{cases} R = 0 \\ X = L\omega \\ \varphi = \pi/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} G = 0 \\ B = -\frac{1}{L\omega} \\ \psi = -\pi/2 \end{cases}$$



Le courant circulant dans une bobine est en retard sur la tension aux bornes de cette même bobine.

IV - 1 - 3 - Condensateur parfait

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + u(t=0^-)$$

= 0 pour pouvoir bénéficier de l'élimination de $e^{j\omega t}$ en notation complexe.

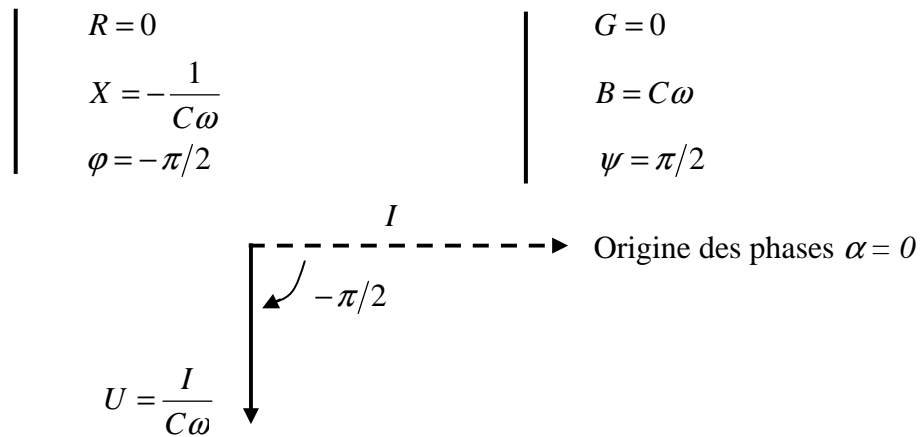
$$\underline{u}(t) = \frac{1}{C} \int_0^t \underline{i}(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \int_0^t I \sqrt{2} \exp j(\omega \tau + \alpha) d\tau$$

$$= \frac{1}{jC\omega} I \sqrt{2} \exp j(\omega t + \alpha) = \frac{I \sqrt{2}}{jC\omega} e^{j\alpha} e^{j\omega t} = \frac{\underline{I}}{jC\omega} \sqrt{2} e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \underline{U} &= \frac{\underline{I}}{jC\omega} \\ \underline{U} &= \frac{\underline{I}}{C\omega} e^{-j\pi/2} \end{aligned} \quad \text{la tension et le courant sont en quadrature.}$$

D'après la définition de l'impédance, on obtient :

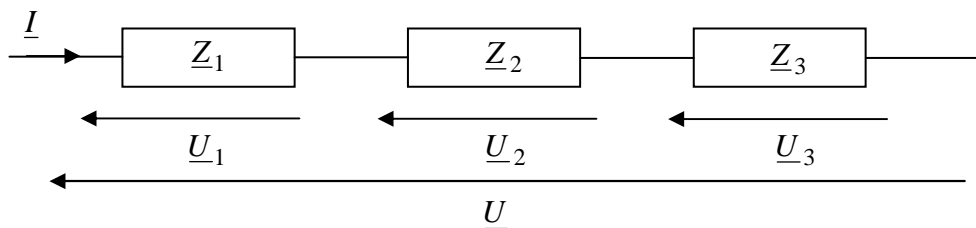
$$\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega} = -j \frac{1}{C\omega} \quad \underline{Y} = jC\omega$$



Le courant circulant dans un condensateur est en avance sur la tension aux bornes de ce même condensateur.

IV - 2 - Association d'éléments

IV - 2 - 1 - Association série

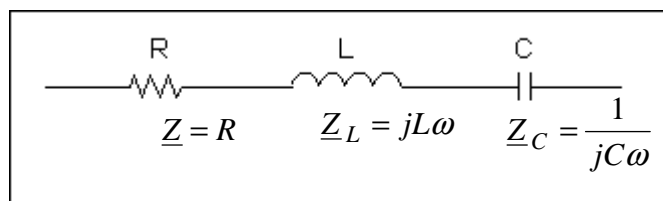


$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \cdot \underline{I} \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{I} \\ \underline{U}_3 = \underline{Z}_3 \cdot \underline{I} \end{cases} \Rightarrow \underline{U} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \cdot \underline{I}$$

$$\underline{Z}_{\text{éq}} = \sum_{i=1}^n \underline{Z}_i$$

somme des impédances en série.

Exemple :



$$\underline{Z}_{\text{éq}} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$



$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

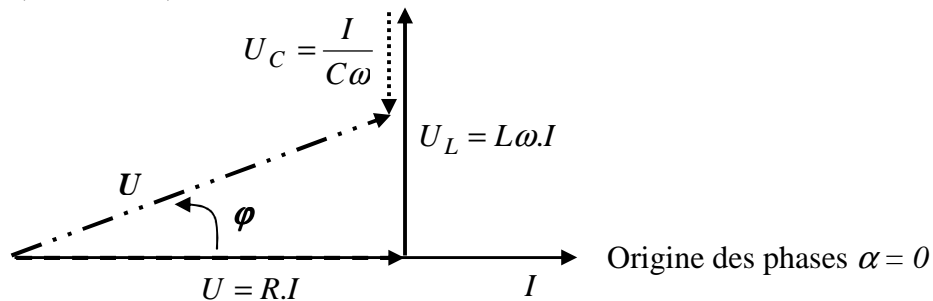
si $L\omega > \frac{1}{C\omega}$ $X > 0$ et $\varphi > 0$

SELFIQUE

$$\varphi = \arctg\left(\frac{L\omega - 1/C\omega}{R}\right)$$

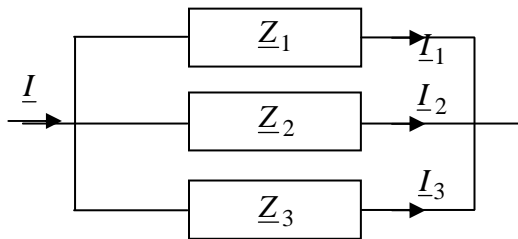
si $L\omega < \frac{1}{C\omega}$ $X < 0$ et $\varphi < 0$

CAPACITIF



SELFIQUE

IV - 2 - 2 - Association parallèle

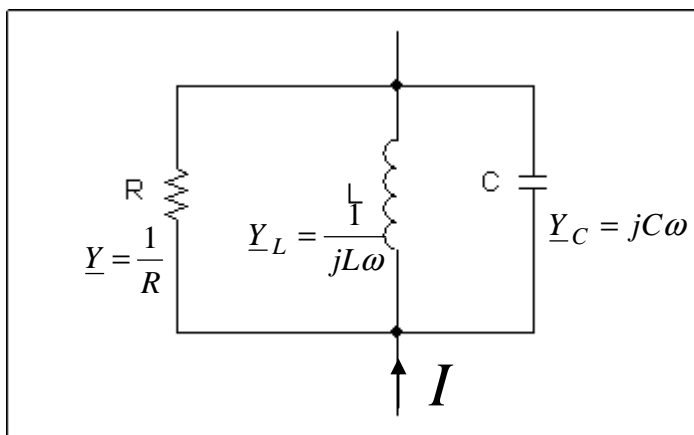


$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{Y}_1 \cdot \underline{U} \\ \underline{I}_2 = \underline{Y}_2 \cdot \underline{U} \\ \underline{I}_3 = \underline{Y}_3 \cdot \underline{U} \end{cases} \Rightarrow \underline{I} = (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) \cdot \underline{U}$$

$$\underline{Y}_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^n \underline{Y}_i$$

somme des admittances en parallèle.

Exemple :



$$\underline{Y}_{\text{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega = \frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$$

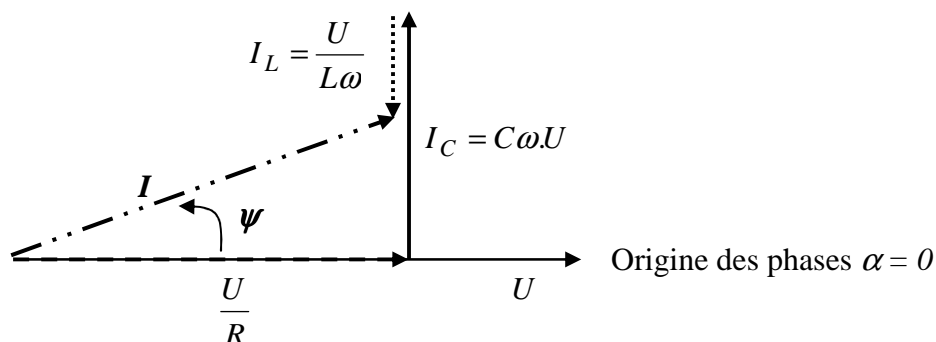


$$Y = |\underline{Y}| = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}$$

si $C\omega > \frac{1}{L\omega}$ $B > 0$ et $\psi > 0$ CAPACITIF

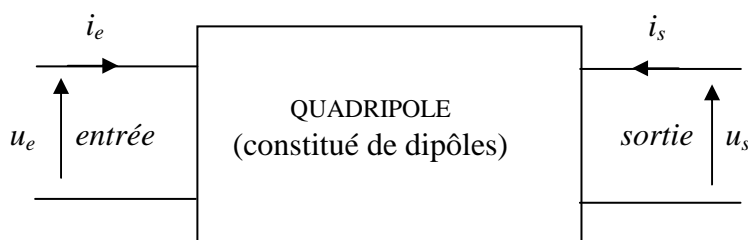
$$\psi = \arctg\left(\frac{C\omega - 1/L\omega}{1/R}\right)$$

si $C\omega < \frac{1}{L\omega}$ $B < 0$ et $\psi < 0$ SELFIQUE



CAPACITIF

V - REPRESENTATION DES FONCTIONS DE TRANSFERT



Un système amplificateur est en général représenté par un quadripôle dont l'entrée est reliée à un circuit de commande et la sortie au circuit d'utilisation.

Pour rendre compte du comportement d'un amplificateur en courant alternatif sinusoïdal, on introduit la fonction de transfert $\underline{T}(\omega)$ ou $\underline{H}(\omega)$.

$\underline{T}(\omega)$ peut être définie :

- en TENSION
- en COURANT
- en PUISSANCE

Exemple : en tension $\underline{T}(\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e}$ avec \underline{U}_s et \underline{U}_e amplitudes complexes efficaces.

➤ Le module de cette fonction de transfert :

$$|\underline{T}(\omega)| = T(\omega) = T$$

$$= A_v = \frac{|\underline{U}_s|}{|\underline{U}_e|}$$

coefficient d'amplification en tension.

➤ L'argument de cette fonction de transfert :

$$\text{Arg}(\underline{T}(\omega)) = \text{Arg}(T)$$

$$= \text{Arg}(\underline{U}_s) - \text{Arg}(\underline{U}_e)$$

angle d'avance de \underline{U}_s sur \underline{U}_e .



Par analogie, on introduit également :

$$\begin{array}{l} A_i = \left| \frac{I_s}{I_e} \right| \quad \text{coefficient d'amplification en courant} \\ A_p = \frac{P_s}{P_e} \quad \text{coefficient d'amplification en puissance} \end{array}$$

Plusieurs représentations de $\underline{T}(\omega)$ sont possibles, sachant que celle de Bode est la plus importante.

V - 1 - Diagramme de Bode

Ce diagramme permet de représenter la fonction $\underline{T}(\omega)$ par :

- * le module $|\underline{T}(\omega)|$ exprimé en DECIBEL (dB).
- * l'argument $\text{Arg}(\underline{T}(\omega))$ exprimé en RADIEN.

en fonction de $\log(\omega)$ [$\Rightarrow \omega$ est repéré en échelle logarithmique]

V - 1 - 1 - le décibel – unité logarithmique

Considérons deux puissances P_s et P_e .

- $\log\left(\frac{P_s}{P_e}\right)$ logarithme décimal du rapport $\frac{P_s}{P_e}$ s'exprime en BEL.
- $10 \cdot \log\left(\frac{P_s}{P_e}\right)$ unité la plus employée. sous-multiple du BEL : le décibel (dB).

$$\boxed{G_p = 10 \cdot \lg\left(\frac{P_s}{P_e}\right)} \quad \underline{\text{gain en puissance}}$$

Si les puissances sont dissipées dans des résistances égales R .

$$\Rightarrow P_s = R \cdot I_s^2 = \frac{V_s^2}{R} \quad P_e = R \cdot I_e^2 = \frac{V_e^2}{R}$$

Donc,

$$\begin{aligned} 10 \cdot \log\left(\frac{P_s}{P_e}\right) &= 10 \cdot \log\left(\frac{R \cdot I_s^2}{R \cdot I_e^2}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{V_s^2 / R}{V_e^2 / R}\right) \\ &= 10 \cdot \log\left(\frac{I_s^2}{I_e^2}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{V_s^2}{V_e^2}\right) \end{aligned}$$

En généralisant, et par convention, on définira les rapports suivants, exprimés en décibels :

$$\boxed{G_v = 20 \cdot \log\left(\frac{V_s}{V_e}\right)} \quad \underline{\text{gain en tension}}$$

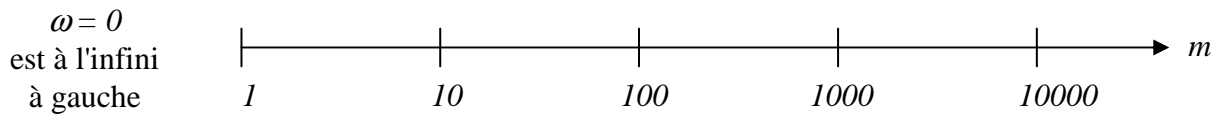
$$\boxed{G_I = 20 \cdot \log\left(\frac{I_s}{I_e}\right)} \quad \underline{\text{gain en courant}}$$



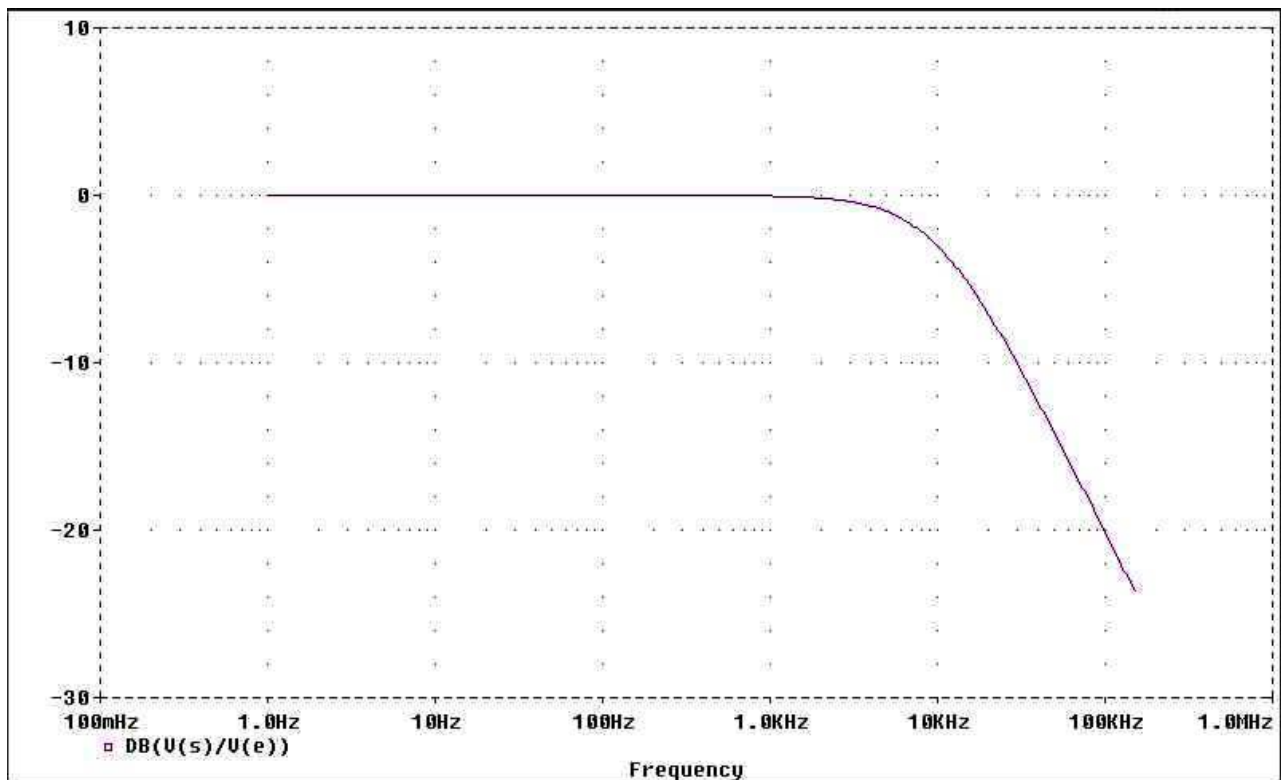
V - 1 - 2 - log(ω) – échelle logarithmique

On réalise une échelle logarithmique en associant à tout nombre m un point M /

$$\overrightarrow{OM} = (\log m) \cdot \vec{u}$$



Attention, les échelles ne sont pas linéaires mais logarithmiques
Les unités ne sont pas logarithmiques.



→ Pour le diagramme de Bode :

ω échelle logarithmique
 $\text{Arg}(T(\omega))$ échelle linéaire
 $20 \cdot \log(T)$ exprimé en dB.

Le tracé de $|T(\omega)|$ conduit à un tracé asymptotique. En général, pour $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow \infty$, les asymptotes à la courbe sont des droites.

DECADE Soient deux pulsations ω_1 et ω_2 auxquelles sont associées deux points M_1 et M_2 . Nous dirons qu'entre M_1 et M_2 il y a une décade si :

$$\begin{aligned} \omega_2 &= 10 \cdot \omega_1 \\ \log \omega_2 &= \log \omega_1 + 1 \end{aligned} \quad \text{pente de l'asymptote en dB/décade}$$

OCTAVE Soient deux pulsations ω_1 et ω_2 auxquelles sont associées deux points M_1 et M_2 . Nous dirons qu'entre M_1 et M_2 il y a une octave si :

$$\begin{aligned} \omega_2 &= 2 \cdot \omega_1 \\ \log \omega_2 &= \log \omega_1 + 0.3 \end{aligned} \quad \text{pente de l'asymptote en dB/octave}$$



V - 1 - 3 - Intérêt des diagrammes de Bode

Soit \underline{T} une fonction de transfert telle que :

$$\underline{T}(\omega) = \underline{T}_1(\omega) \bullet \underline{T}_2(\omega) \bullet \dots \bullet \underline{T}_n(\omega)$$

= produit de n fonctions de transfert

Représentation du module de la fonction de transfert :

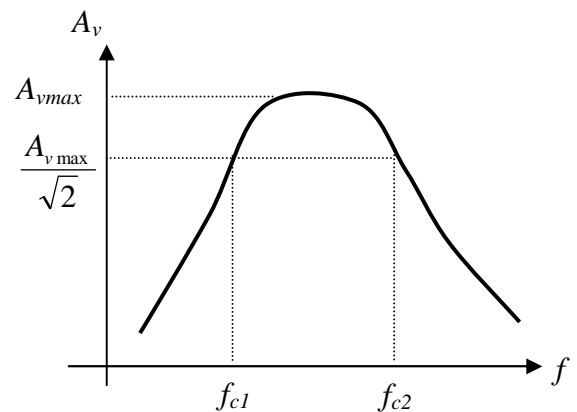
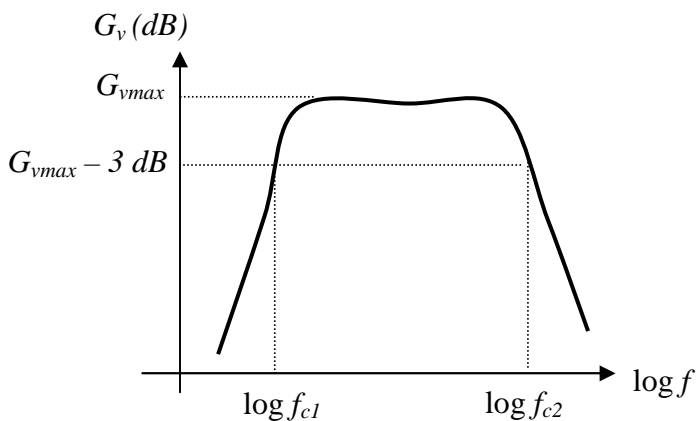
$$\begin{aligned} |\underline{T}(\omega)| &= |\underline{T}_1(\omega) \bullet \underline{T}_2(\omega) \bullet \dots \bullet \underline{T}_n(\omega)| \\ &= |\underline{T}_1(\omega)| \bullet |\underline{T}_2(\omega)| \bullet \dots \bullet |\underline{T}_n(\omega)| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 20 \cdot \log T &= 20 \cdot \log T_1 + 20 \cdot \log T_2 + \dots + 20 \cdot \log T_n \\ \text{Arg}(\underline{T}(\omega)) &= \text{Arg}(\underline{T}_1) + \text{Arg}(\underline{T}_2) + \dots + \text{Arg}(\underline{T}_n) \end{aligned}$$

Ainsi, les représentations du module et de la phase de $\underline{T}(\omega)$ s'obtiennent en faisant la somme des représentations correspondantes du module et de la phase de $\underline{T}_1(\omega)$, $\underline{T}_2(\omega)$...

V - 2 - Fréquences (ou pulsations) de coupure

Exemple de représentation du gain en tension d'un amplificateur.



$$\begin{aligned} \log\left(\frac{A_{vmax}}{\sqrt{2}}\right) &= 20 \cdot \log A_{vmax} + 20 \cdot \log \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 20 \cdot \log A_{vmax} - 3 \\ &= G_{vmax}(\text{dB}) - 3(\text{dB}) \end{aligned}$$

Les fréquences f_{c1} et f_{c2} sont dites :

Fréquence de coupure basse = f_{c1}

Fréquence de coupure haute = f_{c2}



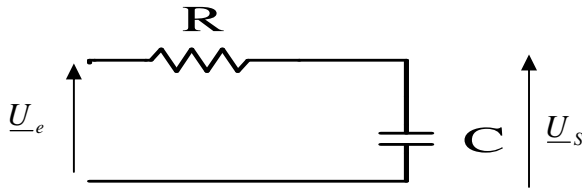
DIPOLES LINEAIRES EN REGIME SINUSOIDAL FORCE

(régime harmonique)

DIAGRAMME DE BODE

I - FONCTION DE TRANSFERT DU PREMIER ORDRE

I - 1 - Circuit passe-bas



On définit \underline{T} à l'aide du pont diviseur de tension :

$$\underline{T} = \frac{\underline{Z}_c}{R + \underline{Z}_c} = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

On pose $\omega_c = \frac{1}{RC}$ pulsation de coupure $\Rightarrow \underline{T} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_c}$

Tracé de Bode $\Rightarrow \begin{matrix} 20\log|\underline{T}| \\ \text{Arg}(\underline{T}) \end{matrix}$

I - 1 - 1 - Etude du module

$$T_{dB} = 20\log\left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}\right] = 20\log 1 - 20\log\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} = -10\log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)$$

Nous allons partager le domaine d'étude en deux parties :

➤ **Pulsations basses** $\omega \ll \omega_c \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_c} \ll 1$

$\Rightarrow T_{dB} \approx -10\log 1 = 0$

$\Rightarrow 0dB$ est donc une première asymptote à la courbe.

➤ **Pulsations hautes** $\omega \gg \omega_c \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_c} \gg 1$

$\Rightarrow T_{dB} \approx -10\log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 = -20\log\frac{\omega}{\omega_c}$

\Rightarrow c'est une fonction linéaire de $\log \omega$. Avec une graduation logarithmique de ω , on obtient une droite.



Déterminons la pente de cette droite :

$$\rightarrow \underline{\omega = 10\omega_c}, \quad T_{dB} = -20 \log \frac{10\omega_c}{\omega_c} = -20 \log 10 \quad \underline{\text{Asymptote de pente } -20 \text{ dB / décade}}$$

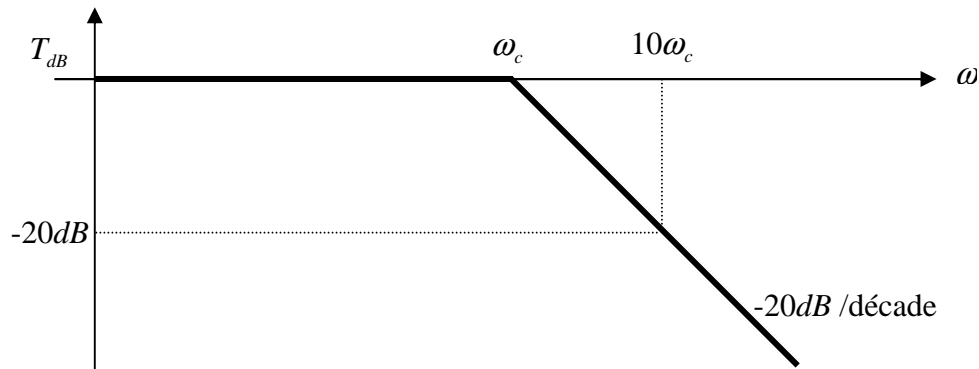
$$T_{dB} = -20 \text{ dB}$$

$$\rightarrow \underline{\omega = 2\omega_c}, \quad T_{dB} = -20 \log \frac{2\omega_c}{\omega_c} = -20 \log 2 \quad \underline{\text{Asymptote de pente } -6 \text{ dB / octave}}$$

$$T_{dB} = -6 \text{ dB}$$

Lorsque $\omega = \omega_c$, pour les deux asymptotes on obtient $T_{dB} = 0$.

\Rightarrow point d'intersection des deux asymptotes.



TRACE ASYMPTOTIQUE ou SQUELETTE de T_{dB}

Pour déterminer le tracé exact de la courbe, on peut calculer les écarts qui existent entre le tracé asymptotique et la courbe réelle.

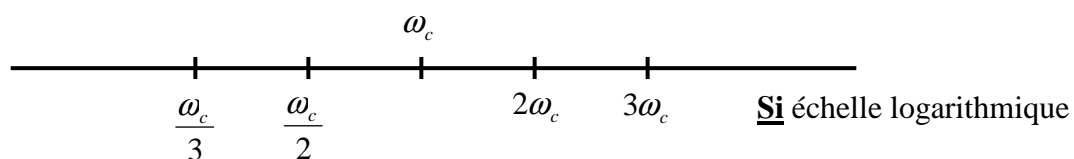
$$\omega \ll \omega_c \quad \Delta T_{dB} = -10 \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \right) - (-10 \log 1)$$

$$= -10 \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \right)$$

$$\omega \gg \omega_c \quad \Delta T_{dB} = -10 \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \right) - \left(-10 \log \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \right)$$

$$= -10 \log \left(\frac{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2}{\left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2} \right) = -10 \log \left(1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 \right)$$

Ces écarts prennent donc des valeurs identiques pour des valeurs de ω géométriquement symétriques par rapport à ω_c . Comme on porte ω sur une échelle logarithmique les écarts sont égaux pour des points d'abscisses situées à des distances égales de ω_c .



T_{dB}	$\omega_c/10$	$\omega_c/2$	ω_c	$2\omega_c$	$10\omega_c$
ΔT_{dB}	$-0.043dB$	$-1dB$	$-3dB$	$-1dB$	$-0.043dB$

Plus grande distance entre courbe et squelette pour $\omega = \omega_c$

$$\omega = \omega_c \Rightarrow \begin{cases} |T| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega_c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ T_{dB} = -20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega_c}\right)^2} = -10 \log \left(1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega_c}\right)^2\right) = -10 \log 2 = -3dB \end{cases}$$

Remarques :

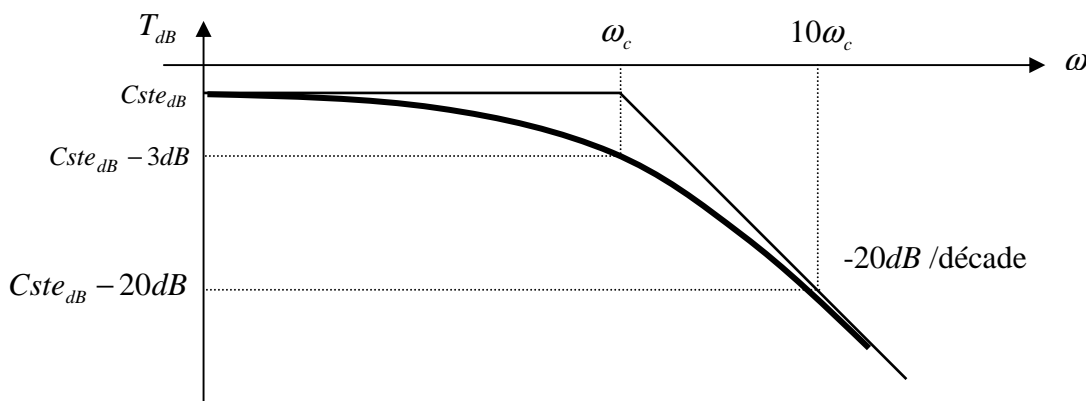
- le maximum de la fonction T_{dB} a lieu en $\omega = 0$
 $\Rightarrow \omega = \omega_c$ on se situe à $-3dB$ du maximum.
- Si la fonction de transfert a un maximum différent de 1, $T = \frac{Cste}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$

$$T_{dB} = 20 \log \left[\frac{Cste}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \right] = 20 \log Cste + 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$$

$\boxed{Cste_{dB}}$
 \swarrow

$\Rightarrow \omega = \omega_c$ la courbe se situe à $-3dB$ de $20 \log Cste$ ou à $\frac{Cste}{\sqrt{2}}$ (en linéaire).

- on peut considérer qu'une décade avant ω_c et qu'une décade après ω_c , la courbe réelle est pratiquement confondue avec le tracé asymptotique.



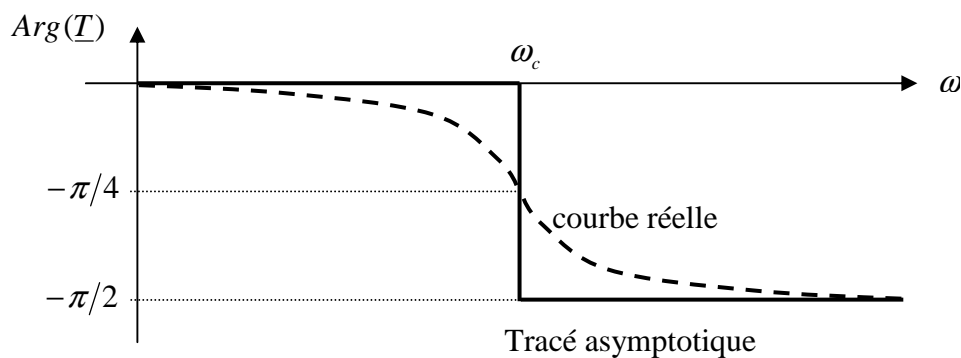
I - 1 - 2 - Etude de la phase

$$\Rightarrow \text{Arg}(\underline{T}) = \text{Arg}(1) - \text{Arg}\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

$$\underline{T} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_c} = \text{Arctg}(0) - \text{Arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

$$\text{Arg}(\underline{T}) = -\text{Arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

- $\omega \rightarrow 0 \quad \text{Arg}(\underline{T}) \rightarrow 0$
- $\omega \rightarrow \infty \quad \text{Arg}(\underline{T}) \rightarrow -\pi/2$
- $\omega = \omega_c \quad \text{Arg}(\underline{T}) = -\pi/4$



I - 1 - 3 - Notion de filtrage

➤ La notion de filtre est directement liée à la réponse en régime sinusoïdal forcé.

$$|\underline{T}| = \frac{|\underline{U}_s|}{|\underline{U}_e|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \Rightarrow \underline{U}_s = \frac{\underline{U}_e}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$$

\underline{U}_s est d'autant plus faible que la pulsation est élevée. \Rightarrow FILTRE PASSE-BAS
(L'amplitude de la sortie n'est grande que pour les fréquences basses)

➤ Lorsque $\omega \gg \omega_c$

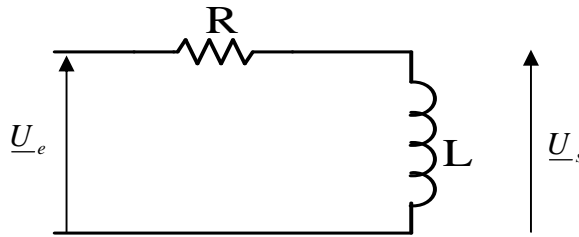
$$\underline{T} \approx \frac{1}{j\omega/\omega_c} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} \Rightarrow \underline{U}_s = \frac{1}{j} \frac{\omega_c}{\omega} \cdot \underline{U}_e$$

La tension de sortie est donc proportionnelle à l'intégrale de la tension d'entrée.

|| Pour des signaux sinusoïdaux de pulsation très grande devant $\omega_c = \frac{1}{RC}$, le circuit se comporte comme un intégrateur.



I - 2 - Circuit passe-haut



On définit \underline{T} à l'aide du pont diviseur de tension :

$$\underline{T} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{Z}_L}{R + \underline{Z}_L} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} = \frac{\frac{R}{jL\omega}}{1 + \frac{R}{jL\omega}} \quad \underline{T} = \frac{j\omega/\omega_c}{1 + j\omega/\omega_c} \quad (1)$$

On pose $\omega_c = \frac{R}{L}$ pulsation de coupure \Rightarrow

$$\underline{T} = \frac{1}{1 - j\omega_c/\omega} \quad (2)$$

I - 2 - 1 - Etude du module

$$(1) \Rightarrow T_{dB} = 20 \log \frac{\sqrt{(\omega/\omega_c)^2}}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}} = 20 \log \frac{\omega/\omega_c}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}}$$

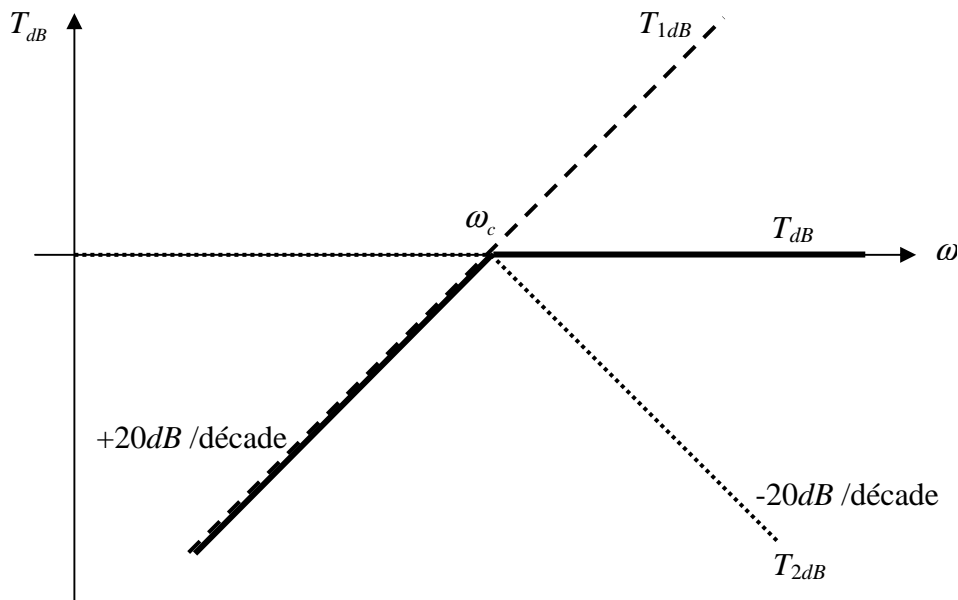
$$\parallel \quad \underbrace{T_{dB} = 20 \log \frac{\omega}{\omega_c}}_{T_{1dB}} - \underbrace{20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}_{T_{2dB} \text{ fonction passe-bas précédente que l'on sait dessiner}}$$

➤ $T_{1dB} = 20 \log \frac{\omega}{\omega_c} \Rightarrow$ c'est une fonction linéaire de $\log \omega$. Avec une graduation logarithmique de ω , on obtient une droite.

Déterminons la pente de cette droite :

$$\rightarrow \underline{\omega = 10\omega_c}, \quad T_{dB} = 20 \log \frac{10\omega_c}{\omega_c} = 20 \log 10 \quad \underline{\text{Asymptote de pente } 20 \text{ dB / décade}}$$

$$T_{dB} = 20 \text{ dB}$$



$$(2) \Rightarrow T_{dB} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_c / \omega)^2}} = -20 \log \sqrt{1 + (\omega_c / \omega)^2}$$

$$T_{dB} = -10 \log(1 + (\omega_c / \omega)^2)$$

Nous allons partager le domaine d'étude en deux parties :

➤ **Pulsations basses** $\omega \ll \omega_c \Rightarrow \frac{\omega_c}{\omega} \gg 1$

$$\Rightarrow T_{dB} \approx -10 \log \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 = -20 \log \frac{\omega_c}{\omega}$$

\Rightarrow c'est une fonction linéaire de $\log \omega$. Avec une graduation logarithmique de ω , on obtient une droite.

$$\Rightarrow T_{dB} \approx -20 \log \omega_c + 20 \log \omega \quad \text{Asymptote de pente } 20 \text{ dB / décade}$$

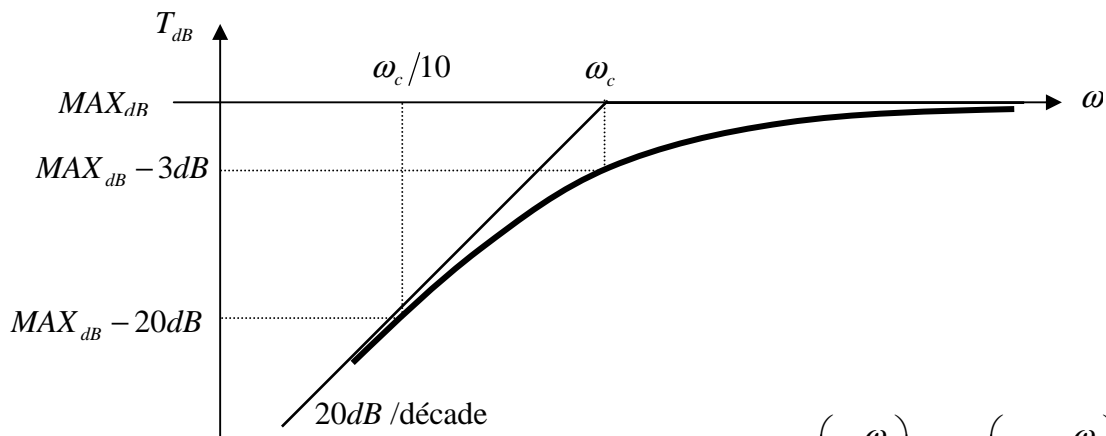
➤ **Pulsations hautes** $\omega \gg \omega_c \Rightarrow \frac{\omega_c}{\omega} \ll 1$

$$\Rightarrow T_{dB} \approx -10 \log 1 = 0$$

$\Rightarrow 0 \text{ dB}$ est donc une asymptote à la courbe.

Lorsque $\omega = \omega_c$, pour les deux asymptotes on obtient $T_{dB} = 0$.

\Rightarrow point d'intersection des deux asymptotes.

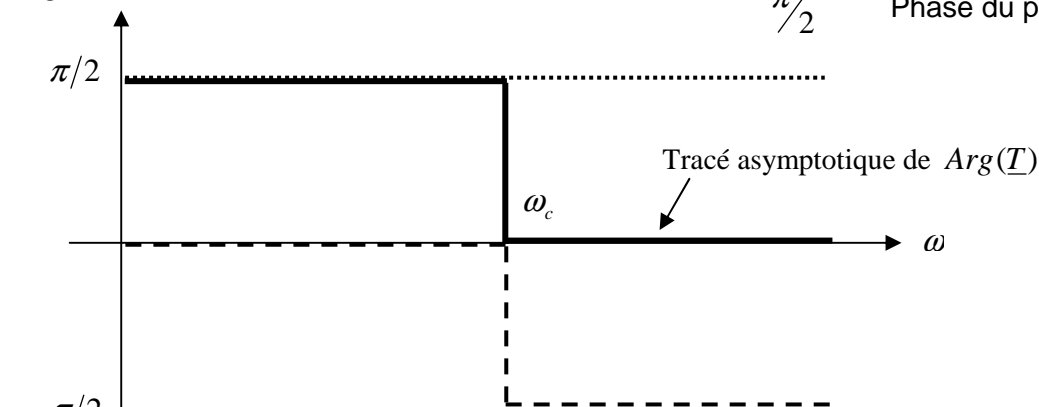


I - 2 - 2 - Etude de la phase

$$\underline{T} = \frac{j\omega/\omega_c}{1 + j\omega/\omega_c} \quad (1)$$

\Rightarrow

$\text{Arg}(\underline{T})$



$$\text{Arg}(\underline{T}) = \text{Arg} \left(j \frac{\omega}{\omega_c} \right) - \text{Arg} \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_c} \right)$$

$$= \underbrace{\text{Arctg} \left(\frac{\omega/\omega_c}{0} \right)}_{\pi/2} - \underbrace{\text{Arctg} \frac{\omega}{\omega_c}}_{\text{Phase du passe-bas précédent}}$$



$$\underline{T} = \frac{1}{1 - j\omega_c/\omega} \quad (2)$$

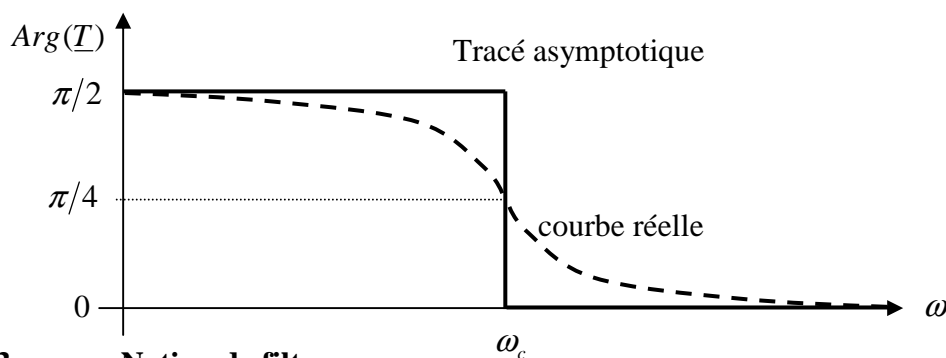
$$\text{Arg}(\underline{T}) = \text{Arg}(1) - \text{Arg}\left(1 - j\frac{\omega_c}{\omega}\right)$$

\Rightarrow

$$= 0 - \text{Arctg}\left(-\frac{\omega_c}{\omega}\right)$$

$$\text{Arg}(\underline{T}) = \text{Arctg}\frac{\omega_c}{\omega}$$

- $\omega \rightarrow 0 \quad \text{Arg}(\underline{T}) \rightarrow \pi/2$
- $\omega \rightarrow \infty \quad \text{Arg}(\underline{T}) \rightarrow 0$
- $\omega = \omega_c \quad \text{Arg}(\underline{T}) = \pi/4$



I - 2 - 3 - Notion de filtrage

$$|\underline{T}| = \frac{|\underline{U}_s|}{|\underline{U}_e|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} \Rightarrow U_s = \frac{U_e}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}$$

U_s est d'autant plus grand que la pulsation est élevée. \Rightarrow FILTRE PASSE-HAUT
(l'amplitude de la sortie n'est grande que pour les fréquences hautes)

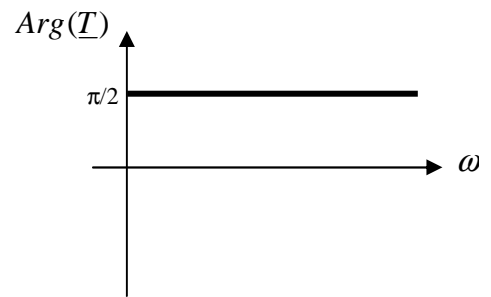
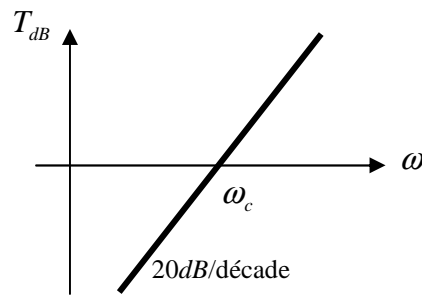
➤ Lorsque $\omega \ll \omega_c$

$$\underline{T} \approx \frac{1}{-j\omega_c/\omega} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} \Rightarrow \underline{U}_s = j \frac{\omega}{\omega_c} \cdot \underline{U}_e$$

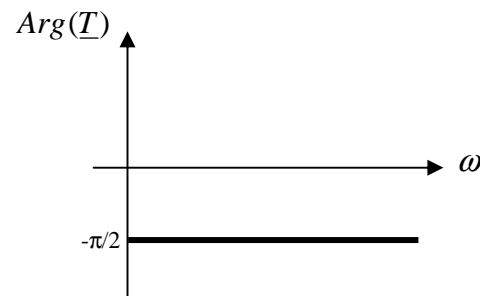
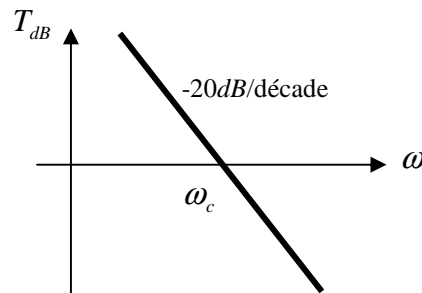
La tension de sortie est donc proportionnelle à la dérivée de la tension d'entrée.

|| Pour des signaux sinusoïdaux de pulsation très petite devant $\omega_c = \frac{R}{L}$, le circuit se comporte comme un dérivateur.

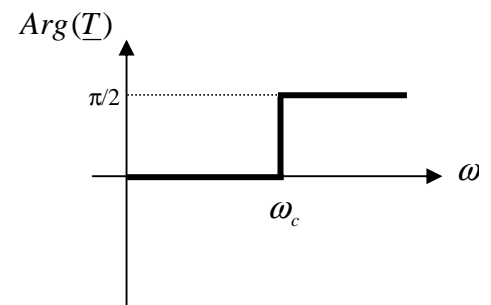
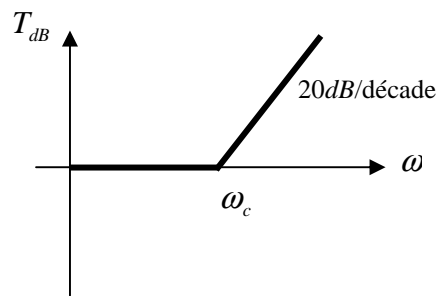
$$\underline{T} = j \cdot \frac{\omega}{\omega_c}$$



$$\underline{T} = \frac{1}{j \cdot \frac{\omega}{\omega_c}}$$



$$\underline{T} = 1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_c}$$



$$\underline{T} = \frac{1}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_c}}$$

